

4. Zatvorene trajektorije i granični cikl dvodimenzionalnog nelinearnog DS

NELINEARAN SISTEM DJ:

$$(1) \quad \frac{dx}{dt} = f(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = g(x, y)$$

gde je $f, g \in C^1(\mathbb{E})$, $\mathbb{E} \subset \mathbb{R}^2$, $t \in \mathbb{R}$.

Linearizacija nelinearnog DS je *lokalni metod* ispitivanja stabilnosti DS: ona daje detaljnu informaciju o trajektorijama u blizini PR, ali ne pruža nikakvu informaciju o ponašanju trajektorija kada one napuste okolinu PR.

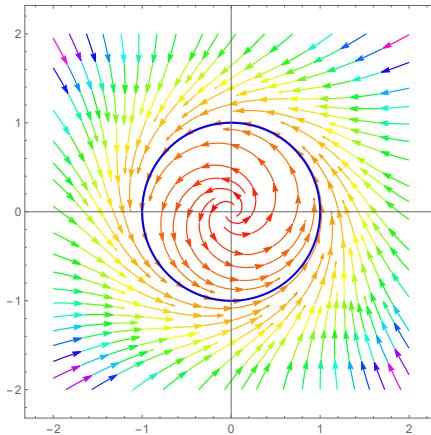
Primer 4.1. Posmatrajmo, nelinearni DS

$$(2) \quad \frac{dx}{dt} = \frac{x}{2} - y - \frac{x}{2}(x^2 + y^2), \quad \frac{dy}{dt} = x + \frac{y}{2} - \frac{y}{2}(y^2 + x^2).$$

Jedini položaj ravnoteže sistema je $(0, 0)$. Jakobijeva matrica je

$$J(0, 0) = \begin{pmatrix} 1/2 & -1 \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix},$$

čije su sopstvene vrednosti $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \pm i$, pa je $(0, 0)$ nestabilan fokus linearizovanog sistema, a prema Teoremi 3.4. $(0, 0)$ je nestabilan fokus nelinearnog DS (Slika 1-(a)).



Slika 1: Fazni portret nelinearnog DS u Primeru 4.1.

Da bi detaljnije analizirali nelinearan sistem, prelazimo na polarne koordinate: $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ i dobijamo nelinearan sistem oblika

$$(3) \quad r' = \frac{dr}{dt} = \frac{r(1 - r^2)}{2}, \quad \theta' = \frac{d\theta}{dt} = 1,$$

čije je opšte rešenje

$$r(t) = \pm \frac{e^{t/2}}{\sqrt{e^t + c_1}}, \quad \theta(t) = t + c_2,$$

Sledi da $\theta(t) \rightarrow \pm\infty$ ako i samo ako $t \rightarrow \pm\infty$. Sve trajektorije rotiraju oko $(0, 0)$ u smeru suprotnom kretanju kazaljki na satu sa istom ugaonom brzinom $d\theta/dt = 1$.

Kako je $r' = 0$ za $r = 0$ ili $r = 1$, sva rešenja koja polaze sa jedinične kružnice ostaju na njoj za svaku t i kreću se periodično po toj kružnici.

Ako je $0 < r < 1$, tada je $dr/dt > 0$, pa se rastojanje tačke od $(0, 0)$ povećava sa porastom t . Kako $\theta \rightarrow \infty$ kada $t \rightarrow \infty$, sve fazne trajektorije unutar jedinične kružnice spiralno se udaljavaju od $(0, 0)$ i približavaju krivoj $r = 1$ kad $t \rightarrow +\infty$. (Slika 1-(b).)

Ako je $r > 1$, tada je $dr/dt < 0$, pa se rastojanje tačke od $(0, 0)$ smanjuje sa porastom t , odnosno sve fazne trajektorije koje polaze iz neke tačke oblasti izvan jedinične kružnice, spiralno se približavaju kružnici $r = 1$ kad $t \rightarrow +\infty$. \square

Dakle, iako nam u prethodnom Primeru linearizacija daje tačnu sliku faznog portreta posmatranog nelinearnog DS u okolini koordinatnog početka, zaključak o ponašanju trajektorija izvan te okoline, odnosno u okolini jedinične kružnice (*graničnog cikla* DS) ne možemo izvesti ispitivanjem linearizovanog sistema, već samo analizom samog nelinarnog DS. Pored toga, primećujemo da ovakav fazni portret nema ni jedan linearan DS. Naime, egzistencija graničnog cikla je isključivo nelinearna pojava.

Pojam graničnog cikla uveo je francuski matematičar Poankare¹ i dao neke kriterijume egzistencije graničnih cikala.

Definicija 1 [Zatvorena trajektorija] *Trajektorija $\varphi(t, x)$ DS (1) kroz tačku x je zatvorena ako postoji $T > 0$ tako da je $\varphi(t, x) = \varphi(t + T, x)$ za svaku $t \in \mathbb{R}$, a minimalno takvo T naziva se period zatvorene trajektorije. Zatvorena trajektorija DS naziva se CIKL.*

Definicija 2 [Granični cikl] *Neka je $\hat{x}(t)$ periodično rešenje DS (1) sa periodom $T > 0$, koje opisuje zatvorenu faznu trajektoriju $\hat{\gamma}$. Za trajektoriju $\hat{\gamma}$ kažemo da je izolovana ako ma koje drugo rešenje $\varphi(t, x)$ čija početna tačka x se nalazi u ε -okolini periodičnog rešenja $\hat{x}(t)$, opisuje faznu trajektoriju koja nije zatvorena. Trajektoriju $\hat{x}(t)$ izolovanog periodičnog rešenja koje opisuje zatvorenu trajektoriju zvaćemo GRANIČNI CIKL.*

¹Henri Poincaré (1854–1912), francuski matematičar i fizičar

Dakle, granični cikl dinamičkog sistema (1) je zatvorena fazna trajektorija Γ tog sistema, za koju postoji okolina sa faznim trajektorijama duž kojih se sve tačke neograničeno približavaju krivoj Γ kad $t \rightarrow \infty$ ili $t \rightarrow -\infty$, odnosno okolina za koju važi da se svaka trajektorija koja polazi iz te okoline spiralno približava ili udaljava od krive Γ .

Primetimo da fazne trajektorije kod linearnih DS PR tipa centra jesu zatvorene, ali ne predstavljaju granične cikle jer nisu izolovane. Zbog toga granični cikl i predstavlja rešenje tipično za nelinearne sisteme. Primetimo takođe da je centar-fokus (videti Definiciju 3.8 i Primer 3.7) okružen nizom graničnih cikla.

Definicija 3 Za rešenje $\hat{x}(t)$ DS (1), gde je $\hat{\gamma}$ njegova trajektorija, kažemo da je orbitalno stabilno ako za svako $\varepsilon > 0$, postoji $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, tako da za bilo koje rešenje $x(t)$ DS (1) važi

$$x(t_0) \in \hat{\gamma}_\delta \quad \Rightarrow \quad x(t) \in \hat{\gamma}_\varepsilon, \quad t \geq t_0$$

gde je $\hat{\gamma}_\varrho$, ϱ -okolina trajektorije $\hat{\gamma}$ (skup tačaka fazne ravni čije rastojanje od trajektorije $\hat{\gamma}$ manje ili jednako ϱ). Rešenje koje nije orbitalno stabilno naziva se orbitalno nestabilno.

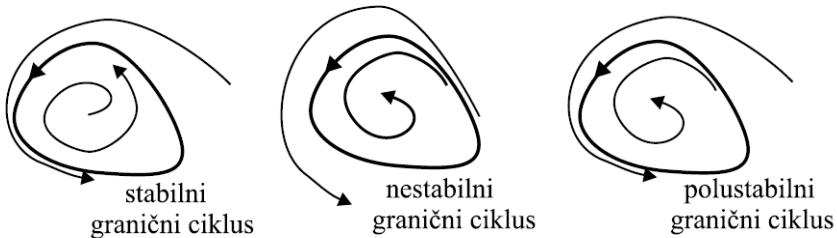
Definicija 4 Ako je $\phi^t : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$ tok DS (1), za cikl Γ kažemo da je stabilan ako za svako $\varepsilon > 0$, postoji okolina U_Γ fazne trajektorije Γ , tako da za svako $x \in U$ i svako $t \geq 0$ je $d(\phi^t(x), \Gamma) < \varepsilon$. Cikl Γ je asimptotski stabilan, ako je stabilan i ako za svako $x \in U_\Gamma$ važi $\lim_{t \rightarrow \infty} d(\phi^t(x), \Gamma) = 0$.

Svaka zatvorena trajektorija koja okružuje centar DS je stabilna, ali nije asimptotski stabilna.

Status graničnog cikla u pogledu orbitalne stabilnosti je vrlo specifičan. Budući da je predstavljen zatvorenom faznom trajektorijom, granični cikl deli faznu ravan na dve oblasti: spoljašnju i unutrašnju. Zbog prepostavke o jedinstvenosti rešenja granični cikl nije samopresecajuća kriva, pa su ove dve oblasti u topološkom smislu prosto povezane. Ovo je specifičnost DS drugog reda. U faznim prostorima veće dimenzije ovo ne važi. Prepostavka o jedinstvenosti rešenja sistema (1) nam govori da fazne trajektorije ne mogu preći iz unutrašnje oblasti u spoljašnju, kao ni obrnuto. Zato se o graničnom ciklu može reći sledeće:

- * Ako se sve fazne trajektorije iz neke okoline graničnog cikla približavaju graničnom ciklu kada $t \rightarrow \infty$ (sa spoljne i unutrašnje strane), granični cikl je **stabilan** (Slika 2-(a));

- * Ako se sve fazne trajektorije iz neke okoline graničnog cikla približavaju graničnom ciklu kada $t \rightarrow -\infty$ (sa spoljne i unutrašnje strane), granični cikl je *nestabilan* (Slika 2-(b));
- * Ako se fazne trajektorije iz neke okoline graničnog cikla približavaju graničnom ciklu sa jedne strane kada $t \rightarrow \infty$, a sa druge strane kada $t \rightarrow -\infty$, granični cikl je *polustabilan* (Slika 2-(c)). Odnosno, fazne trajektorije se približavaju graničnom ciklu iznutra (spolja), a udaljavaju od njega spolja (iznutra) kad $t \rightarrow \infty$.



Slika 2

U Primeru 4.1. jedinična kružnica je stabilan granični cikl DS (2).

Primer 4.2. Ispitati da li sistem DJ

$$\begin{aligned}x' &= y + x \left(\sqrt{x^2 + y^2} - 1 \right) \left(\sqrt{x^2 + y^2} - 2 \right) \\y' &= -x + y \left(\sqrt{x^2 + y^2} - 1 \right) \left(\sqrt{x^2 + y^2} - 2 \right)\end{aligned}$$

ima graničnih cikala.

REŠENJE: Pre svega, tačka $(0, 0)$ je jedini položaj ravnoteže ovog sistema. Ali kako dato vektorsko polje $f(x, y), g(x, y)$

$$\begin{aligned}f(x, y) &= y + x \left(\sqrt{x^2 + y^2} - 1 \right) \left(\sqrt{x^2 + y^2} - 2 \right) \\g(x, y) &= -x + y \left(\sqrt{x^2 + y^2} - 1 \right) \left(\sqrt{x^2 + y^2} - 2 \right)\end{aligned}$$

nije diferencijabilno u $(0, 0)$. Teorema Hartman-Grobmana se ne može primeniti i ponašanje trajektorija u okolini PR ne može se odrediti linearizacijom.

Izvršimo transformaciju sistema DJ uvođenjem polarnih koordinata $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$:

$$(4) \quad \frac{dr}{dt} = r(r-1)(r-2), \quad \frac{d\theta}{dt} = -1.$$

Opšte rešenje ovog sistema DJ je

$$r(t) = 1 \pm \frac{1}{\sqrt{1 + c_1 e^{2t}}}, \quad \theta(t) = -t + c_2.$$

Odavde sledi da $\theta(t) \rightarrow \mp\infty$ ako i samo ako $t \rightarrow \pm\infty$. Sve trajektorije rotiraju oko $(0, 0)$ u smeru kretanja kazaljki na satu sa istom ugaonom brzinom $|d\theta/dt| = 1$.

Iz opšteg rešenja sledi da ovaj sistem ima dva granična cikla: $r = 1$ (za $c_1 = \infty$) i $r = 2$ (za $c_1 = 0$), koji okružuju položaj ravnoteže $r = 0$. Ostaje da se ispita njihova stabilnost.

Dovoljno je ispitati stabilnost PR jednodimenzionalnog vektorskog polja $r' = r(r-1)(r-2)$, jer kretanje u smeru θ je rotacija sa konstantnom ugaonom brzinom. PR su $r = 0$, $r = 1$ i $r = 2$. Odredjujemo znak za r' i odgovarajućom strelicom označavamo vektor vektorskog polja u proizvoljnoj tački r - **strelica je u smeru nadesno ako je $r' > 0$ odnosno u smeru nalevo ako je $r' < 0$** :

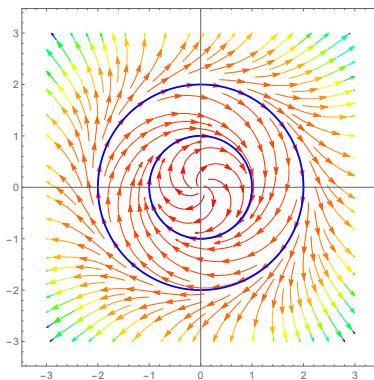
$$\rightarrow \quad \text{ako je } r' > 0 \qquad \leftarrow \quad \text{ako je } r' < 0$$

Dakle,

r'	$r = 0$	$0 < r < 1$	$r = 1$	$1 < r < 2$	$r = 2$	$r > 2$
	○	→	•	←	○	→

Pri tome koristimo sledeće oznake:

- → STABILAN GRANIČNI CIKL
- → NESTABILAN GRANIČNI CIKL
- ⊕ → POLUSTABILAN GRANIČNI CIKL (stabilan sa unutrašnje strane)
- ⊖ → POLUSTABILAN GRANIČNI CIKL (nestabilan sa unutrašnje strane)



Slika 3: Primer 4.2. ~ fazni portret nelinearnog DS

Sve fazne trajektorije koje polaze iz prstena $1 < r < 2$ u blizini krive $r = 1$, spiralno se približavaju toj trajektoriji kad $t \rightarrow \infty$; sve fazne trajektorije koje polaze iz neke tačke oblasti $r < 1$, u blizini krive $r = 1$, takodje se spiralno približavaju toj trajektoriji kad $t \rightarrow \infty$. Dakle, $r = 1$ je *stabilan granični cikl*.

Sve fazne trajektorije koje polaze iz prstena $1 < r < 2$ u blizini krive $r = 2$, udaljavaju se od ove krive kad $t \rightarrow \infty$; sve fazne trajektorije koje polaze iz neke tačke oblasti $r > 2$, u blizini krive $r = 2$, udaljavaju od nje kad $t \rightarrow \infty$. Dakle, $r = 2$ je *nestabilan granični cikl*. \square

Primer DS koji su topološki ekvivalentni, ali nisu topološki konjugovani:

Kao što smo definisali u poglavlju &3 ako homeomorfizam h preslikava fazne trajektorije jednog DS u fazne trajektorije drugog DS, pri čemu se čuva orijentacija trajektorija, ali i vremenska parametrizacija duž trajektorija, za DS kažemo da su topološki konjugovani. Pokazali smo i da se periodične trajektorije DS preslikavaju u periodične trajektorije njemu topološki konjugovanog DS, pri čemu su periodi tih trajektorija jednaki. S druge strane, periodi periodičnih trajektorija topološki ekvivalentnih DS ne moraju biti jednaki. U narednom primeru navedeni su DS u polarnim koordinatama koji su topološki ekvivalentni, ali nisu topološki konjugovani - oba DS imaju isti granični cikl (jediničnu kružnicu) ali različitih perioda.

Primer 4.3. Posmatrajmo DS

$$(5) \quad r' = r(1 - r^2), \quad \theta' = 1$$

$$(6) \quad r' = r(1 - r^2), \quad \theta' = 4$$

ili u Dekartovim koordinatama

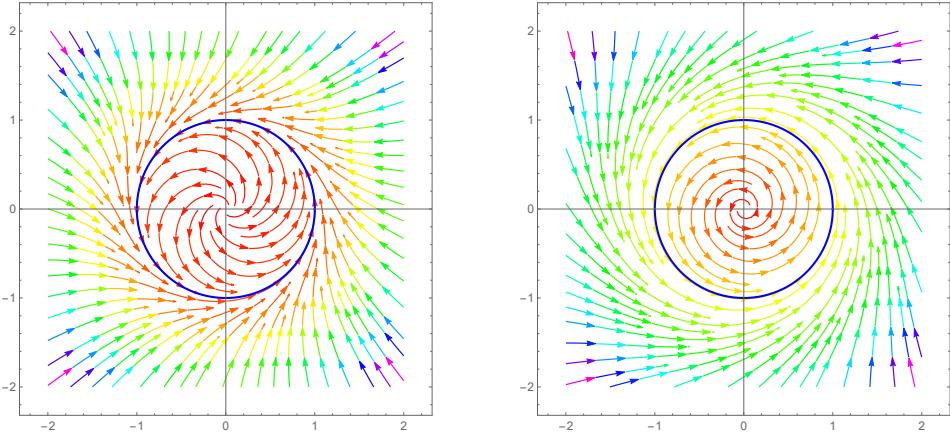
$$(7) \quad \frac{dx}{dt} = x - 4y - x(x^2 + y^2), \quad \frac{dy}{dt} = x + y - y(y^2 + x^2)$$

$$(8) \quad \frac{dx}{dt} = x - y - x(x^2 + y^2), \quad \frac{dy}{dt} = 4x + y - y(y^2 + x^2)$$

Oba sistema imaju zatvorenu trajektoriju $\gamma : r = 1$ (stabilni granični cikl), i nestabilan fokus $(0, 0)$ (za $r = 0$) - videti Primer 4.1.

r'	$r = 0$	$0 < r < 1$	$r = 1$	$r > 1$
	\circ	\rightarrow	\bullet	\leftarrow

Iz $\theta' = k$ je $\theta(t) = kt + c$. Ako je $\theta(0) = 0$, biće $\theta(t) = kt$, $k \in \{1, 4\}$



Slika 4: Primer 4.3. ~ fazni portreti nelinearnog DS (5) i (6)

Za $r = 1$, rešenje DS (5) u Dekartovim koordinatama je

$$x(t) = \cos t, \quad y(t) = \sin t,$$

dok je rešenje DS (6) u Dekartovim koordinatama

$$x(t) = \cos 4t, \quad y(t) = \sin 4t.$$

Dakle, zatvorena trajektorija $\gamma : r = 1$ je periode $T = 2\pi$ za DS (5), a za DS (6) perioda je $T = \pi/2$. Prema tome, ako pretpostavimo da su ova dva DS topološki konjugovana, prema Lem 3.2. ("periodične trajektorije DS preslikavaju se u periodične trajektorije njemu topološki konjugovanog DS, pri čemu su periodi tih trajektorija jednaki"), dolazimo do kontradikcije, pa zaključujemo da DS (5) i (6) nisu topološki konjugovani. Može se pokazati da su ova dva DS topološki ekvivalentni.

Za DS (5) u smislu kretanja tačke po faznoj trajektoriji $r = 1$, kako u početnom vremenskom trenutku polazimo iz tačke

$$(\cos 0, \sin 0) = (1, 0)$$

doćićemo u tačku

$$(\cos \pi, \sin \pi) = (-1, 0)$$

za vreme $t_1 = \pi$ i kretanje je u smeru suprotnom kretanju kazaljki na satu. Nastavljujući u istom smeru za vreme $t_2 = \pi$, vraćamo se u tačku

$$(\cos 2\pi, \sin 2\pi) = (1, 0).$$

Dakle, ako je φ^t tok DS (5) biće $\varphi^\pi((1, 0)) = (-1, 0)$ i $\varphi^\pi((-1, 0)) = (1, 0)$, odnosno

$$\varphi^{t_2}(\varphi^{t_1}((1, 0))) = (1, 0) = \varphi^{t_1+t_2}((1, 0)) = \varphi^{2\pi}((1, 0)).$$

Za DS (6), kako u početnom vremenskom trenutku na faznoj trajektoriji $r = 1$, polazimo iz tačke

$$(\cos 0, \sin 0) = (1, 0)$$

doćićemo kretanjem u smeru suprotnom kretanju kazaljki na satu u tačku

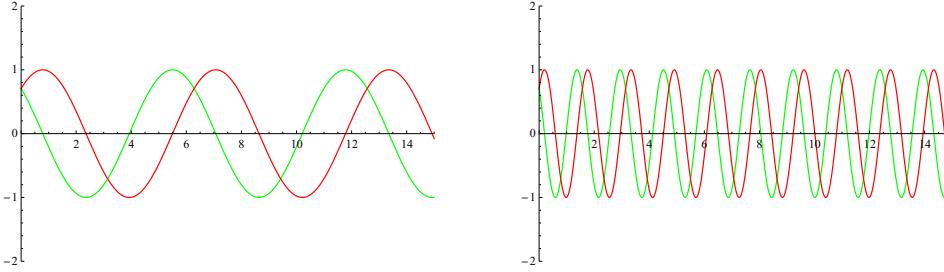
$$(\cos \pi, \sin \pi) = (-1, 0)$$

za vreme $t_1 = \pi/4$. Nastavljajući u istom smeru za vreme $t_2 = \pi/4$, vraćamo se u tačku

$$(\cos 2\pi, \sin 2\pi) = (1, 0).$$

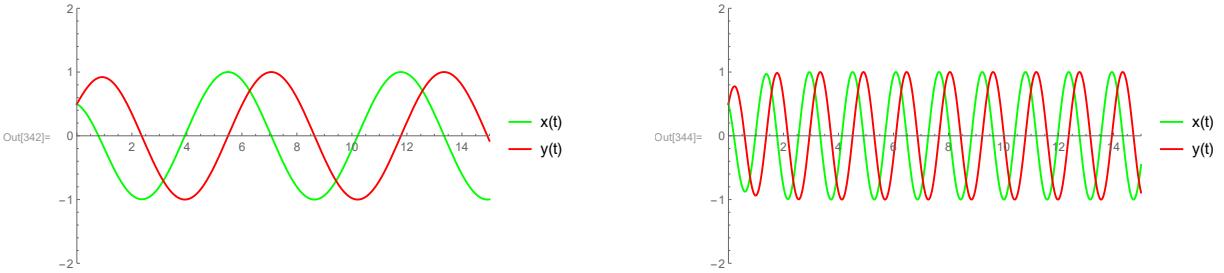
Dakle, ako je ψ^t tok DS (6) biće

$$\psi^{t_2}(\psi^{t_1}((1, 0)) = (1, 0) = \psi^{t_1+t_2}((1, 0)) = \psi^{\pi/2}((1, 0)).$$



Slika 5: Primer 4.3. ~ rešenja nelinearnog DS (7) (levo) i DS (8) (desno) za početne vrednosti $x(0) = \sqrt{2}/2$, $y(0) = \sqrt{2}/2$

Na Slici 5 prikazana su približna (numerička) rešenja DS (7) i (8) za početne vrednosti $(x_0, y_0) = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ - tačke sa jedinične kružnice u faznoj ravni. Vidimo da su rešenja periodična, ali je evidentno perioda rešenja DS (8) manja od periode rešenja DS (7). Trajektorija koja u nekom početnom trenutku polazi iz tačke fazne ravni na graničnom ciklu, ostaje na graničnom ciklu $\gamma : x^2 + y^2 = 1$ za svako $t > t_0$.



Slika 6: Primer 4.3. ~ rešenja nelinearnog DS (7) (levo) i DS (8) (desno) za početne vrednosti $x(0) = 0.5$, $y(0) = 0.5$

Na Slici 6 prikazana su približna (numerička) rešenja DS (7) i (8) za početne vrednosti $(x_0, y_0) = (0.5, 0.5)$ - tačke unutar jedinične kružnice u faznoj ravni. Trajektorija iz ove tačke fazne ravni približava se graničnom ciklu $\gamma : x^2 + y^2 = 1$. Približavanje fazne trajektorije graničnom ciklu γ zapravo označava da

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (x^2(t) + y^2(t)) = 1.$$

Vrednosti $x^2(t) + y^2(t)$ približnih rešenja za početne vrednosti $(x_0, y_0) = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ za oba DS, ali za različite vremenske trenutke $t \in \{0.5, 1, 3, 5, 10\}$ prikazani su u narednoj tabeli:

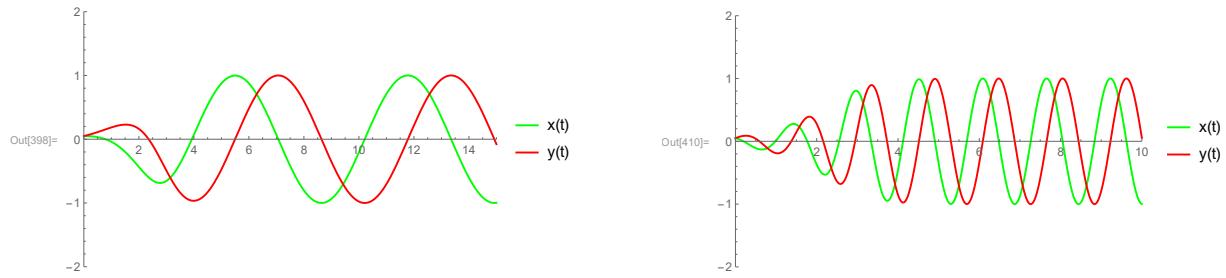
t	$x^2(t) + y^2(t)$ za DS (7)	$x^2(t) + y^2(t)$ za DS (8)
0.5	1	0.999998
1	1	1
3	1	1
5	1	1
10	1	1

Vrednosti $x^2(t) + y^2(t)$ približnih rešenja za početne vrednosti $(x_0, y_0) = (0.5, 0.5)$ za oba DS, ali za različite vremenske trenutke $t \in \{0.5, 1, 3, 5, 10\}$ prikazani su u narednoj tabeli:

t	$x^2(t) + y^2(t)$ za DS (7)	$x^2(t) + y^2(t)$ za DS (8)
0.5	0.731059	0.731058
1	0.880797	0.880795
3	0.997527	0.997527
5	0.999954	0.999954
10	0.999999	0.999999

Na Slici 7 prikazana su približna (numerička) rešenja DS (7) i (8) za početne vrednosti $(x_0, y_0) = (0.05, 0.05)$ - tačke u okolini nestabilnog PR $(0, 0)$. Trajektorija iz ove tačke fazne ravni, iako vrlo blizu PR koji je nestabilan, takodje se približava graničnom ciklu $\gamma : x^2 + y^2 = 1$. Vidimo kao i u prethodnom slučaju da su rešenja periodična i da je perioda rešenja DS (8) manja od perioda rešenja DS (7).

Vrednosti $x^2(t) + y^2(t)$ približnih rešenja za početne vrednosti $(x_0, y_0) = (0.05, 0.05)$ za oba DS, ali za različite vremenske trenutke $t \in \{1, 3, 5, 10\}$ prikazani su u nared-

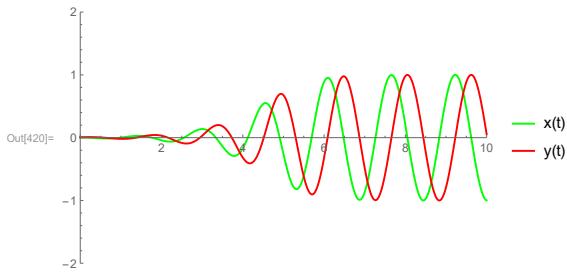


Slika 7: Primer 4.3. \sim rešenja nelinearnog DS (7) (levo) i DS (8) (desno) za početne vrednosti $x(0) = 0.05, y(0) = 0.05$

noj tabeli:

t	$x^2(t) + y^2(t)$ za DS (7)	$x^2(t) + y^2(t)$ za DS (8)
1	0.0358016	0.0358015
3	0.669671	0.669669
5	0.991045	0.991046
10	0.999999	1.0

U poredjenju sa rešenjima za početne vrednosti $x(0) = 0.5, y(0) = 0.5$ u prethodnoj tabeli, sada se vrednost $x^2(t) + y^2(t)$ očigledno sporije približava jedinici - u početku je vrednost $x^2(t) + y^2(t)$ dosta manja od jedinice. Trajektoriji koja je krenula iz tačke $(x_0, y_0) = (0.05, 0.05)$ (koja je udaljenija od graničnog cikla), treba više vremena da se približi graničnom ciklu, ali u svakom slučaju se približava stabilnoj zatvorenoj trajektoriji.



Slika 8: Primer 4.3. \sim rešenja nelinearnog DS (8) za početne vrednosti $x(0) = 0.005, y(0) = 0.005$

Na Slici 8 prikazana su približna rešenja DS (8) za početne vrednosti $(x_0, y_0) = (0.005, 0.005)$ - približavanje je još sporije i sada je npr. $x^2(5) + y^2(5) = 0.524117$.

U prethodnim primerima, prelaskom na polarne koordinate bilo je moguće efektivno odrediti jednačine graničnih cikla. Međutim, u opštem slučaju to nije uvek jednostavno, a najčešće nije ni moguće. Postoje mnogobrojni kriterijumi kojima se utvrđuje postojanje ili nepostojanje zatvorenih faznih trajektorija i

graničnih cikala dinamičkog sistema, što je od posebne važnosti u primenama u kojima je potrebno utvrditi stabilnost režima rada nekog fizičkog sistema.

4.1. Nepostojanje graničnog cikla DS

Predstavićemo sada četiri različita postupka za odbacivanje mogućnosti postojanja zatvorenih trajektorija. Da bi pokazali da DS nema granični cikl u nekoj oblasti, možemo koristiti:

- ★ Gradijentni sistem
- ★ Dulacov kriterijum
- ★ Funkcija Ljapunova
- ★ Indeks položaja ravnoteže

GRADIJENTNI SISTEMI

Ako postoji funkcija $G \in C^2(\mathbb{E})$, $\mathbb{E} \subset \mathbb{R}^n$ tako da se DS može zapisati u obliku

$$(9) \quad X'(t) = -\nabla G(X(t)), \quad X(t) = (X_1(t), \dots, X_n(t))$$

onda se DS naziva GRADIJENTI sa potencijalnom funkcijom G .

DS (1) je gradijentni ako postoji funkcija $G \in C^2(\mathbb{E})$, $\mathbb{E} \subset \mathbb{R}^2$, tako da je

$$f(x, y) = -\frac{\partial G}{\partial x}(x, y), \quad g(x, y) = -\frac{\partial G}{\partial y}(x, y), \quad (x, y) \in \mathbb{E}.$$

Prema Teoremi 3.10. DS (1) je gradijentni akko

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial g}{\partial x}(x, y), \quad (x, y) \in \mathbb{E}.$$

Teorema 1 *U gradijentnim dinamičkim sistemima ne postoje zatvorene trajektorije.*

DOKAZ: Prepostavimo suprotno, da postoji zatvorena trajektorija $\hat{\Gamma}$ kojoj odgovara periodično rešenje $X(t)$ sa periodom $T > 0$. Kako je $X(T) = X(0)$, biće $G(X(T)) = G(X(0))$, odnosno priraštaj funkcije G je tokom jednog perioda jednak nuli

$$\Delta G = G(X(T)) - G(X(0)) = 0.$$

S druge strane, kako je

$$\frac{dG(X(t))}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial G(X(t))}{\partial X_i} \frac{dX_i(t)}{dt} = \nabla G(X(t)) \cdot X'(t), \quad 0 \leq t \leq T,$$

imamo

$$\begin{aligned} 0 = G(X(T)) - G(X(0)) &= \int_0^T \frac{dG(X(t))}{dt} dt = \int_0^T \nabla G(X(t)) \cdot X'(t) dt \\ &= - \int_0^T \|X'(t)\|^2 dt < 0 \end{aligned}$$

što je kontradikcija . \square

Primer 4.4. Dokazati da ne postoje zatvorene trajektorije DS

$$x' = y + 2xy = f(x, y), \quad y' = x + x^2 - y^2 = g(x, y).$$

REŠENJE: Kako je $\partial f / \partial y = 1 + 2x = \partial g / \partial x$, DS je gradijenti sa potencijalnom funkcijom $G(x, y) = y^3/3 - xy - x^2y$, jer je $-\partial G / \partial x = y + 2xy$ i $-\partial G / \partial y = x + x^2 - y^2$. Prema Teoremi 1 ne postoje zatvorene trajektorije datog DS. \square

DULACOV KRITERIJUM

Teorema 2 (Dulacov Kriterijum) Neka je $F = (f, g) \in C^1(\mathbb{E})$, gde je \mathbb{E} jednostruko povezana oblast u faznoj ravni. Ako postoji funkcija $v \in C^{(1)}(\mathbb{E})$, tako da funkcija

$$\text{div}(vF) = \frac{\partial}{\partial x}(vf) + \frac{\partial}{\partial y}(vg)$$

ne menja znak u \mathbb{E} , tada u oblasti \mathbb{E} DS (1) nema zatvorenih trajektorija (nema periodičnih rešenja u \mathbb{E}).

DOKAZ: Prepostavimo suprotno da u \mathbb{E} postoji zatvorena trajektorija Γ sa periodom T :

$$\Gamma : x = x(t), \quad y = y(t), \quad 0 \leq t \leq T.$$

Neka je $G \subset \mathbb{E}$ oblast unutar krive Γ . Primenom Grinove formule imamo

$$\begin{aligned} \iint_G \left[\frac{\partial}{\partial x}(vf) + \frac{\partial}{\partial y}(vg) \right] dx dy &= \oint_{\Gamma} (vf dy - vg dx) \\ &= \int_0^T \left(vf \frac{dy}{dt} - vg \frac{dx}{dt} \right) dt \\ &= \int_0^T v(fg - gf) dt = 0 \end{aligned}$$

što je suprotno pretpostavci da $\operatorname{div}(vF) \neq 0$ u G . Dakle, DS (1) nema zatvorenih trajektorija u \mathbb{E} . \square

NAPOMENA. Dulakov kriterijum važi i za jednostruko povezana oblast $\mathbb{E} \subset \mathbb{R}^n$. Naime, ako je $f \in C^{(1)}(\mathbb{E})$ i postoji $v \in C^{(1)}(\mathbb{E})$, tako da funkcija $\operatorname{div}(vf)$ ne menja znak u \mathbb{E} , DS $x' = f(x)$ nema zatvorenih trajektorija koje se cele nalaze u oblasti \mathbb{E} .

Nedostatak ovog postupka je što ne postoji algoritam za nalaženje funkcije $v(x, y)$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Pokazalo se da su funkcije $\frac{1}{x^\alpha y^\beta}$, e^{ax+by} vrlo često dobro probno rešenje za funkciju $v(x, y)$.

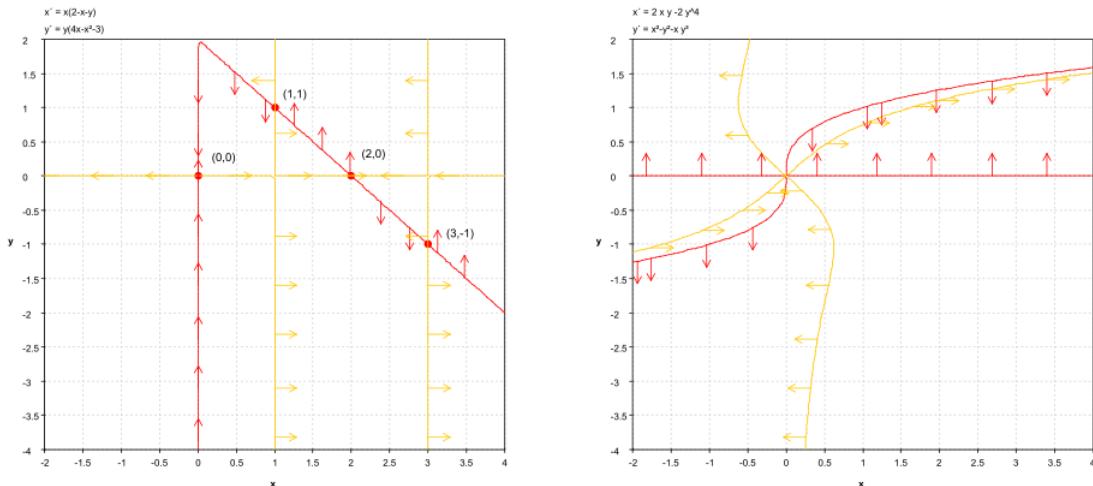
Primer 4.5. Dokazati da dinamički sistemi

$$(a) \quad \begin{aligned} x' &= x(2-x-y) \\ y' &= y(4x-x^2-3) \end{aligned} \quad (b) \quad \begin{aligned} x' &= 2xy - 2y^4 \\ y' &= x^2 - y^2 - xy^3 \end{aligned}$$

nemaju zatvorenih trajektorija u \mathbb{R}^2 .

REŠENJE: (A) DS ima četiri PR:

- $(0, 0)$ - sedlo
- $(3, -1)$ - stabilan fokus
- $(2, 0)$ - sedlo
- $(1, 1)$ - stabilan fokus



Slika 9: Nula-izokline i položaju ravnoteže DS u Primeru 4.5.

x -nula-izokline su $x = 0$, $x + y = 2$, a y -nula-izokline su $y = 0$, $x = 1$, $x = 3$. Nula-izokline sa poljem pravaca i PR prikazani su na Slici 9-(a).

Ako izaberemo $v(x, y) = 1/xy$, $x \neq 0$, $y \neq 0$, dobijamo

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(vF) &= \frac{\partial}{\partial x}(vf) + \frac{\partial}{\partial y}(vg) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{2-x-y}{y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{4x-x^2-3}{x} \right) = -\frac{1}{y} \leqslant 0, \quad x \neq 0, y \geqslant 0.\end{aligned}$$

(i) prema Teoremi 2 sistem nema zatvorenih trajektorija ni u jednom od četiri kvadranta.

Kako je za $x = 0$: $x' = 0$, $y' = -3y \leqslant 0$ za $y \geqslant 0$ pravac vektorskog polja je \uparrow duž negativne y -ose, a \downarrow duž pozitivne y -ose (Sl. 9-(a))

Kako je za $y = 0$: $y' = 0$, $x' = x(2-x)$, duž x -ose pravac vektorskog polja je \rightarrow za $0 < x < 2$, a \leftarrow za $x < 0$ i $x > 2$ (Sl. 9-(a))

Dakle, koordinatne ose su invarijantni skupovi DS - sadrže pravolinijske trajektorije DS. Prema tome, kako se trajektorije DS ne mogu seći

(ii) ne postoji zatvorene trajektorije koje bi presecate ma koju od koordinatnih osa.

Iz (i) i (ii) zaključujemo da ne postoji granični cikl datog DS.

(B) DS ima samo jedan PR $(0, 0)$ koji je nehiperbolični. Kako je

$$\operatorname{div}(F) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} = -3x^2y \leqslant 0, \quad x \neq 0, y \geqslant 0$$

prema Teoremi 2, sistem nema zatvorenih trajektorija ni u jednom od četiri kvadranta. Međutim, duž $x = 0$ je $x' = -2y^4 \leq 0$, $y' = -y^2 \leq 0$, tako da je pravac vektorskog polja \swarrow duž y -ose. Za $y = 0$ je $x' = 0$ i $y' = x^2 \geq 0$, pa je pravac vektorskog polja \uparrow duž x -ose (Sl. 9-(b)). Dakle, zatvorena trajektorija ne može presecati ni jednu od koordinatnih osa, odnosno dati DS nema zatvorenih trajektorija u \mathbb{R}^2 . \square

Primer 4.6. Dokazati da dinamički sistem

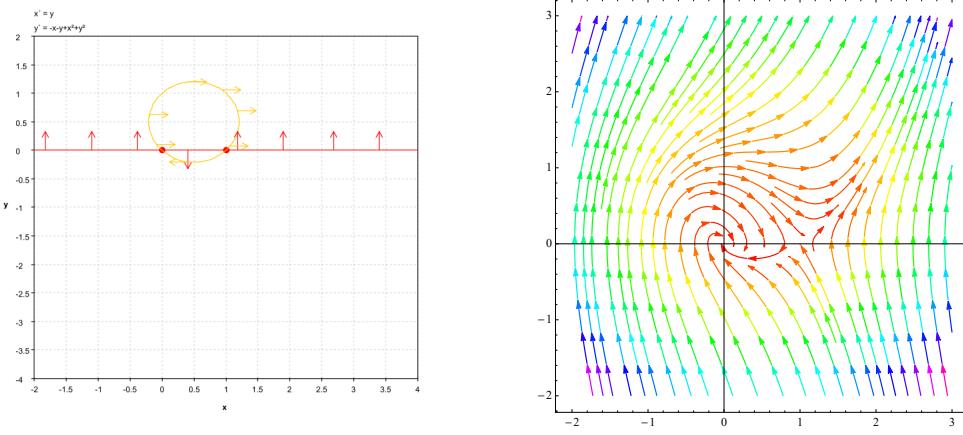
$$\begin{aligned}x' &= y \\ y' &= -x - y + x^2 + y^2\end{aligned}$$

nema zatvorenih trajektorija u \mathbb{R}^2 .

REŠENJE: Ako izaberemo $v(x, y) = e^{-2x}$, dobijamo

$$\operatorname{div}(vF) = -2e^{-2x}y + e^{-2x}(-1 + 2y) = -e^{-2x} < 0, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Dakle, prema Teoremi 2 sistem nema zatvorenih trajektorija u celoj faznoj ravni.



Slika 10: Primer 4.6. : (a) Nula-izokline i položaju ravnoteže DS (b) Fazni portret DS

DS ima dva PR: $(0, 0)$ je stabilan fokus, i $(1, 0)$ je sedlo. x -nula izoklina je $y = 0$, a y -nula izoklina je

$$y = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4x^2 + 4x}}{2} \Rightarrow 4y^2 - 4y + 1 + 4x^2 - 4x + 1 = 2 \\ \Rightarrow (2x - 1)^2 + (2y - 1)^2 = 2$$

Nula-izokline sa poljem pravaca i PR prikazani su na Slici 10. \square

FUNKCIJA LJAPUNOVA

Posmatrajmo DS

$$(10) \quad x' = f(x), \quad f \in C^1(E)$$

sa položajem ravnoteže $x = x^* \in E$. Za funkciju $V \in C^1(E)$ izvod funkcije duž proizvoljnog rešenja $x(t)$ je

$$(11) \quad \dot{V}(x) = \frac{dV(x(t))}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V(x)}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V(x)}{\partial x_i} f_i(x) = \nabla V(x) \cdot f(x), \quad x \in E.$$

Definicija 5 Funkcija $V(x)$ neprekidna i sa neprekidnim parcijalnim izvodima prvog reda u E , naziva se funkcija Ljapunova PR x^* DS (10) ako je

- (i) $V(x^*) = 0$;
- (ii) $V(x) > 0$ za svako $x \in E$, $x \neq x^*$;
- (iii) $\dot{V}(x) = \frac{dV(x(t))}{dt} \leq 0$, $x \in E$, $x \neq x^*$.

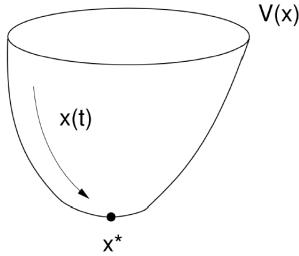
Uslov (iii) znači da je funkcija Ljapunova nerastuća duž proizvoljne trajektorije $x(t)$. Uslovi (i) i (ii) znače da je funkcija $V(x)$ pozitivno definitna.

Teorema 3 *Prepostavimo da DS (10) ima samo jedan asimptotski stabilan PR x^* . Ako postoji funkcija Ljapunova PR x^* za koju je $\dot{V}(x) < 0$ za svako $x \in E \setminus \{x^*\}$ (naziva se stroga funkcija Ljapunova), onda taj DS nema zatvorenih trajektorija u E .*

DOKAZ: Prepostavimo suprotno, da postoji zatvorena trajektorija $\hat{\Gamma}$ DS (10) kojoj odgovara periodično rešenje $x(t)$ sa periodom $T > 0$. Kako je $V(x(T)) = V(x(0))$, priraštaj stroge funkcije Ljapunova V PR x^* je tokom jednog perioda jednak nuli $\Delta V = V(x(T)) - V(x(0)) = 0$. S druge strane, prema (11) je

$$0 = V(x(T)) - V(x(0)) = \int_0^T \frac{dV(x(t))}{dt} dt = \int_0^T \dot{V}(t) dt < 0, \quad x \in E,$$

što je kontradikcija. \square



Slika 11: Funkcija Ljapunova

Egzistencija funkcije Ljapunova povlači da su sve trajektorije monotone duž grafika $V(x)$ prema PR x^* (Slika 11). Metoda Ljapunova za ispitivanje stabilnosti položaja ravnoteže $x = 0$ sistema DJ (10) zasniva se na monotonosti pozitivno definitne funkcije $V(x)$. Često se ispitivanje stabilnosti zasniva na pozitivno definitnoj funkciji

$$(12) \quad v(x) = v(x_1, x_2, \dots, x_n) = \alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \dots + \alpha_n x_n^2, \\ \alpha_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_n^2 > 0.$$

Specijalno, za $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 1$, funkcija $V(x) = \sqrt{v(x)}$ je euklidska norma u \mathbb{R}^n . Rašćenje ili opadanje rastojanja položaja ravnoteže $x = 0$ od proizvoljne tačke x sa trajektorije $x = x(t)$, zavisi od znaka prvog izvoda $\dot{V}(x)$ odredjenog sa (11). Ako je $\dot{V}(x) \leq 0$, ne povećava se rastojanje od položaja ravnoteže do tačke koja se kreće trajektorijom kad se t povećava, pa je položaj ravnoteže stabilan; ako je $\dot{V}(x) < 0$, tada ovo rastojane teži nuli kad $t \rightarrow \infty$, pa je položaj

ravnoteže asimptotski stabilan; ako je $\dot{V}(x) > 0$, rastojanje se povećava sa rastom t , što znači da se tačke na trajektoriji udaljavaju od položaja ravnoteže, koji je u tom slučaju nestabilan. Ovo je samo gruba interpretacija metode Ljapunova i motiv za ispitivanje stabilnosti položaja ravnoteže sistema na osnovu znaka prvog izvoda funkcije $V(x)$ duž proizvoljnog rešenja sistema, ali i razlog zbog koga da bi primenili Teoremu 3 za pokazivanje da dati DS nema graničnog cikla najčešće tražimo funkciju Ljapunova u obliku (12).

Ako je (x^*, y^*) PR sistema (1), funkciju Ljapunova $V(x, y)$ tog PR tražimo u jednom od oblika:

$$(1) \quad V(x, y) = a(x - x^*)^2 + b(y - y^*)^2, \quad a, b > 0$$

$$(2) \quad V(x, y) = a(x - x^*)^2 + b(x - x^*)(y - y^*) + c(y - y^*)^2, \quad a > 0, \quad b^2 - 4ac < 0$$

$$(3) \quad V(x, y) = a(x - x^*)^{2m} + b(y - y^*)^{2n}, \quad a, b > 0$$

$$(4) \quad V(x, y) = a\left(x - x^* - x^* \ln \frac{x}{x^*}\right) + b\left(y - y^* - y^* \ln \frac{y}{y^*}\right), \quad x, y, x^*, y^* > 0$$

Primer 4.7. Dokazati da dinamički sistem

$$(a) \quad \begin{aligned} x' &= -x + 4y \\ y' &= -x - y^3 \end{aligned}$$

$$(b) \quad \begin{aligned} x' &= -y - 3x^3 \\ y' &= x^5 - 2y^3 \end{aligned}$$

nema zatvorenih trajektorija u \mathbb{R}^2 .

REŠENJE: (A) Jedini PR je $(0, 0)$, za koji linearizacijom utvrđujemo da je stabilan fokus nelinarnog DS. Posmatrajmo funkciju $V(x, y) = ax^2 + by^2$. Tada je

$$\dot{V}(x, y) = 2axx' + 2byy' = 2ax(-x + 4y) + 2by(-x - y^3) = -2ax^2 + 2(4a - b)xy - 2by^4.$$

Ako izaberemo a, b tako da je $4a - b = 0$ (npr. $a = 1, b = 4$), dobija se $V(x, y) = x^2 + 4y^2$ i $\dot{V}(x, y) = -2x^2 - 8y^4$, tako da je $V(x, y) > 0$ i $\dot{V}(x, y) < 0$ za svako $(x, y) \neq (0, 0)$. Dakle, $V(x, y) = x^2 + 4y^2$ je funkcija Ljapunova datog DS koja zadovoljava uslov da je $\dot{V} < 0$, pa prema Teoremi 3 ne postoji granični cikl datog DS.

(B) Jedini PR je $(0, 0)$, za koji linearizacijom utvrđujemo da je stabilan fokus nelinarnog DS. Posmatrajmo funkciju $V(x, y) = ax^{2m} + by^{2n}$. Tada je

$$\begin{aligned} \dot{V}(x, y) &= 2amx^{2m-1}x' + 2nby^{2n-1}y' \\ &= 2amx^{2m-1}(-y - 3x^3) + 2nby^{2n-1}(x^5 - 2y^3) \\ &= \underbrace{-6amx^{2(m+1)}}_{<0} - \underbrace{2amx^{2m-1}y}_{\leq 0} + \underbrace{2bny^{2n-1}x^5}_{<0} - \underbrace{4bny^{2(n+1)}}_{<0} \end{aligned}$$

Ako izaberemo m, n tako da u izrazu neodređenog znaka stepeni za x, y budu jednaki:

$$2m - 1 = 5 \Rightarrow m = 3, \quad 2n - 1 = 1 \Rightarrow n = 1.$$

Tada je

$$\dot{V}(x, y) = -18ax^8 - 6ax^5y + 2byx^5 - 4by^4 = -18ax^8 - 2(3a - b)x^5y - 4by^4.$$

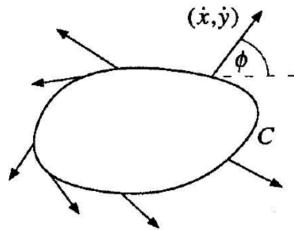
Da bi neutralisali član neodređenog znaka treba izabrati da je $3a - b = 0$, npr. $a = 1, b = 3$. Dobija se $V(x, y) = x^6 + 3y^2$ i $\dot{V}(x, y) = -18x^8 - 12y^4$, tako da je $V(x, y) > 0$ i $\dot{V}(x, y) < 0$ za svako $(x, y) \neq (0, 0)$. Dakle, $V(x, y) = x^6 + 3y^2$ je funkcija Ljapunova datog DS koja zadovoljava uslov da je $\dot{V}(x, y) < 0$, pa prema Teoremi 3 ne postoji granični cikl datog DS. \square

INDEKS POLOŽAJA RAVNOTEŽE DS

INDEKS ZATVORENE KRIVE U ODNOSU NA VEKTORSKO POLJE:

Neka je $F = (P, Q)$ glatko vektorsko polje u faznoj ravni. *Singularna tačka ili kritična tačka* $X^* = (x^*, y^*)$ vektorskog polja je tačka za koju je $F(X^*) = (P(x^*, y^*), Q(x^*, y^*)) = (0, 0)$. Neka je $\mathcal{C} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ zatvorena glatka kriva bez samoporeseka koja ne prolazi kroz singularnu tačku vektorskog polja. U svakoj tački $X(x, y)$ krive \mathcal{C} vektor vektorskog polja F zaklapa sa pozitivnim delom x -ose ugao

$$(13) \quad \Theta(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{Q(x, y)}{P(x, y)}$$



Slika 12: Indeks zatvorene krive u odnosu na vektorsko polje

Ako je $F \in C^1(\mathbb{R}^2)$, to je $d\Theta/dt \in C(\mathbb{R}^2)$. Kada se tačka X kreće po krivoj \mathcal{C} suprotno kretanju kazaljki na satu, ugao Θ menja se neprekidno (jer je vektorsko polje glatko). Ako se tačka $X = (x, y)$ kreće po krivoj \mathcal{C} u smeru suprotnom kretanju kazalji na satu (Slika 12.) i ponovo dođe u početni položaj, označimo

sa $\Delta\Theta$ ukupnu promenu ugla (13) koji vektor vektorskog polja F , u tački $X = (x, y)$ krive \mathcal{C} , zaklapa sa pozitivnim delom x -ose. Ugao $\Theta(x, y)$ dobija priraštaj $\Delta\Theta = 2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. Ceo broj

$$I_{\mathcal{C}}(F) = \frac{\Delta\Theta}{2\pi}$$

nazivamo **INDEKS ZATVORENE KRIVE \mathcal{C} U ODNOSU NA VEKTORSKO POLJE $F \in C^1(\mathbb{R}^2)$** i označavamo sa $I_{\mathcal{C}}(F)$. *Broj $I_{\mathcal{C}}(F)$ je najveći ceo broj okretaja u smeru suprotnom kretanju kazalji na satu koji napravi vektorsko polje dok tačka $X = (x, y)$ pređe jedan pun krug duž krive \mathcal{C} u smeru suprotnom kretanju kazaljki na satu.*

Indeks zatvorene krive \mathcal{C} u odnosu na vektorsko polje $F = (P, Q)$ dobija se preko krivolinijskog integrala. Naime,

$$\begin{aligned} \Theta &= \arctg \frac{Q}{P} \Rightarrow d\Theta = \frac{\partial\Theta}{\partial P} dP + \frac{\partial\Theta}{\partial Q} dQ \\ &\Rightarrow I_{\mathcal{C}}(F) = \frac{\Delta\Theta}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \oint_C d\Theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{\mathcal{C}}(F) &= \frac{1}{2\pi} \oint_C d\Theta = \frac{1}{2\pi} \oint_C d\left(\arctg \frac{Q}{P}\right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \oint_C \frac{P^2}{P^2 + Q^2} \frac{PdQ - QdP}{P^2} = \frac{1}{2\pi} \oint_C \frac{PdQ - QdP}{P^2 + Q^2}. \end{aligned}$$

Ako je zatvorena kriva $\mathcal{C} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ zadata parametarskim jednačinama

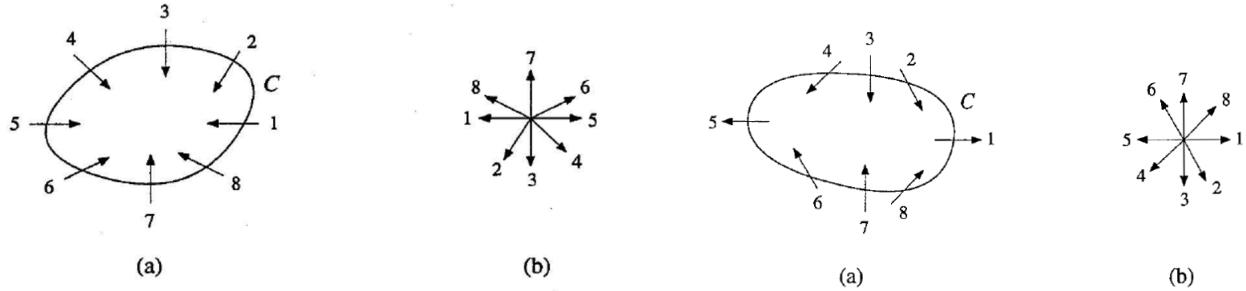
$$\mathcal{C} : x = x(t), y = y(t), a \leq t \leq b,$$

onda je indeks krive u odnosu na vektorsko polje F jednak

$$\begin{aligned} I_{\mathcal{C}}(F) &= \frac{1}{2\pi} \int_a^b \left[\frac{P(x(t), y(t)) (Q_x(x(t), y(t))x'(t) + Q_y(x(t), y(t))y'(t))}{P(x(t), y(t))^2 + Q(x(t), y(t))^2} \right. \\ (14) \quad &\quad \left. - \frac{Q(x(t), y(t)) (P_x(x(t), y(t))x'(t) + P_y(x(t), y(t))y'(t))}{P(x(t), y(t))^2 + Q(x(t), y(t))^2} \right] dt. \end{aligned}$$

Da bi odredili indeks zatvorene krive nije neophodno poznavati vektorsko polje u celoj ravni, već samo duž krive \mathcal{C} .

Indeks krive \mathcal{C} na Slici 13-(levo) i Slici 13-(desno) određujemo tako što vršimo translaciju svih vektora (bez rotacije) tako da svi vektori imaju zajednički početak, čime dobijamo Slike 13-(b). Indeks krive \mathcal{C} na Slici 13-(levo) je $I_{\mathcal{C}} = +1$, dok je indeks krive \mathcal{C} na Slici 13-(desno) $I_{\mathcal{C}} = -1$.

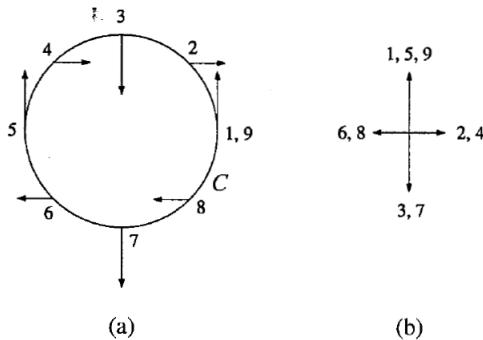


Slika 13: Indeks zatvorene krive u odnosu na vektorsko polje

Primer 4.8. Za vektorsko polje $F = (f, g) = (x^2y, x^2 - y^2)$ naći indeks $I_C(F)$ krive $C : x^2 + y^2 = 1$.

REŠENJE: Pravac vektorskog polja odredićemo u nekoliko karakterističnih tačaka $(\pm 1, 0), (0, \pm 1), (\pm \sqrt{2}/2, \pm \sqrt{2}/2)$.

- za $(x, y) = (1, 0)$ vektorsko polje je $(f, g) = (0, 1)$ i taj vektor je na Slici 14.-(a) označan sa #1,
- za $(x, y) = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ vektorsko polje je $(f, g) = (\sqrt{2}/4, 0)$, označeno sa #2,
- za $(x, y) = (0, 1)$ vektorsko polje je $(f, g) = (0, -1)$, označeno sa #3, itd.



Slika 14: Indekse krive $x^2 + y^2 = 1$ u odnosu na vektorsko polje $(x^2y, x^2 - y^2)$

Translacijom svih vektora (bez rotacije) tako da svi vektori imaju zajednički početak dobijamo Sliku 14-(b). Kretanjem od #1 do #9, vektori rotiraju najpre za 180° u smjeru kazalji na satu između #1 i #3, zatim za 360° u smjeru suprotnom kretanju kazalji na satu između #3 i #7 i konačno rotiraju opet za 180° u smjeru kazalji na satu između #7 i #9. Dakle, $I_C(F) = [\Theta]_C = -\pi + 2\pi - \pi = 0$.

Indeks krive C u odnosu na dato vektorsko polje možemo izračunati i pomoću (14). Kako su parametarske jednačine jedinične kružnice $x = \cos t$, $y = \sin t$,

$$0 \leq t \leq 2\pi$$

$$P_x(x, y) = 2xy, \quad P_y(x, y) = x^2, \quad Q_x(x, y) = 2x, \quad Q_y(x, y) = -2y$$

imamo

$$\begin{aligned} I_{\mathcal{C}}(F) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 t \sin t (-4 \sin t \cos t) - (\cos^2 t - \sin^2 t)(2 \cos t \sin^2 t - \cos^3 t)}{\cos^2 t + \sin^2 t} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (-\cos t \sin^2 2t + \cos^2 2t \cos t (\cos^2 t - 2 \sin^2 t)) dt = 0. \quad \square \end{aligned}$$

SVOJSTVA INDEKSA ZATVORENE KRIVE U ODNOSNU NA VEKTORSKO POLJE:

- A Ako se kriva \mathcal{C}_1 neprekidnom transformacijom preslikava u krivu \mathcal{C}_2 koja ne prolazi kroz kritičnu tačku vektorskog polja F , onda je $I_{\mathcal{C}_1}(F) = I_{\mathcal{C}_2}(F)$.
- B Sa promenom orjentacije svih vektora vektorskog polja smenom $t \rightarrow -t$, indeks zatvorene krive se ne menja.

Teorema 4 *Neka je \mathcal{C} zatvorena kriva i \mathcal{D} ograničena oblast čiji je rub $\partial\mathcal{D} = \mathcal{C}$. Ako je F neprekidno vektorsko polje koje nema singularnih tačaka u \mathcal{D} tj. $F(X) \neq 0$ za svako $X \in \mathcal{D}$, onda je indeks krive \mathcal{C} u odnosu na vektorsko polje F jednako nuli.*

Odnosno, ako je $I_{\mathcal{C}}(F) \neq 0$, vektorsko polje F ima u oblasti \mathcal{D} ograničenoj krivom \mathcal{C} (unutar krive \mathcal{C}) singularnu tačku.

Indeks u odnosu na vektorsko polje zatvorene trajektorije \mathcal{C} koja ne okružuje niti jedan položaj ravnoteže DS je $I_{\mathcal{C}}(F) = 0$, tj. ako je $I_{\mathcal{C}}(F) \neq 0$, zatvorena fazna trajektorija \mathcal{C} okružuje neki položaj ravnoteže DS.

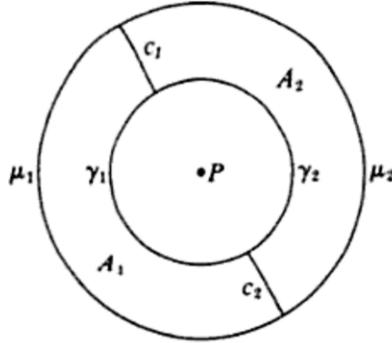
Teorema 5 *Granični cikl DS okružuje bar jedan položaj ravnoteže DS.*

Iz Teoreme 5. zaključujemo:

- **ako DS nema PR, onda nema ni graničnog cikla.**

INDEKS POLOŽAJA RAVNOTEŽE DS – INDEKS SINGULARNE TAČKE VEKTORSKOG POLJA:

Definicija 6 Neka je $F \in C^1(E)$, gde je E otvoren podskup od \mathbb{R}^2 i neka je $X^* \in E$ izolovani PR vektorskog polja $F = (f, g)$. Indeksom položaja ravnoteže X^* DS (1), odnosno indeksom singularne tačke X^* vektorskog polja F , nazivamo indeks u odnosu na vektorsko polje F proizvoljne zatvorene glatke krive \mathcal{C} bez samopreseka koja okružuje položaj ravnoteže X^* , ali ne i neki drugi položaj ravnoteže DS.



Slika 15

Posmatrajmo PR P i kružnice γ i μ sa centrom u tom PR i dokažimo da je $I_\gamma(P) = I_\mu(P)$. Na prstenu A je $F(X) \neq 0$ pa prema Teoremi 4 je indeks krive ∂A u odnosu na vektorsko polje F jednak nuli. Spojimo kružnice γ i μ dužima c_1 i c_2 koje dele kružnice na polukružnice γ_1 , γ_2 i μ_1 , μ_2 (Slika 15). Tada je $\partial A_1 = \mu_1^+ \cup c_2^+ \cup \gamma_1^- \cup c_1^+$ i $\partial A_2 = \mu_2^+ \cup c_1^- \cup \gamma_2^- \cup c_2^-$. Dakle, kako je $I_{c_i^+} = -I_{c_i^-}$, $i = 1, 2$ imamo

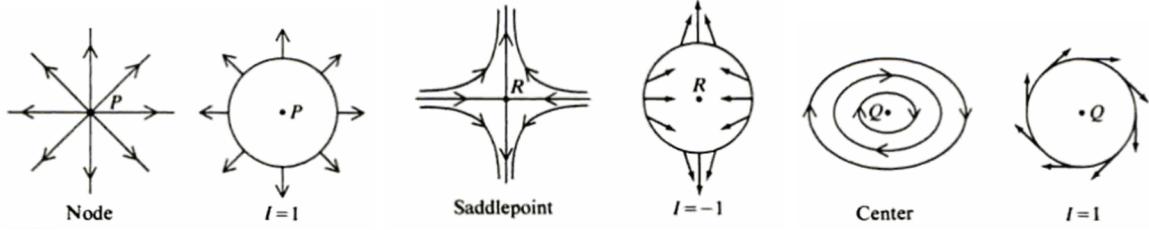
$$0 = I_{\partial A} = I_{\partial A_1} + I_{\partial A_2} = I_{\mu_1^+} + I_{\gamma_1^-} + I_{\mu_2^+} + I_{\gamma_2^-} = I_{\mu^+} - I_{\gamma^+} \Rightarrow I_\mu = I_\gamma.$$

Dakle, indeks položaja ravnoteže X^* DS je nezavistan od krive \mathcal{C} i samim tim je svojstvo samo položaja ravnoteže, pa će biti označen sa $I_F(X^*)$.

Primer 4.9. Odrediti indeks čvora, fokusa, centra i sedla.

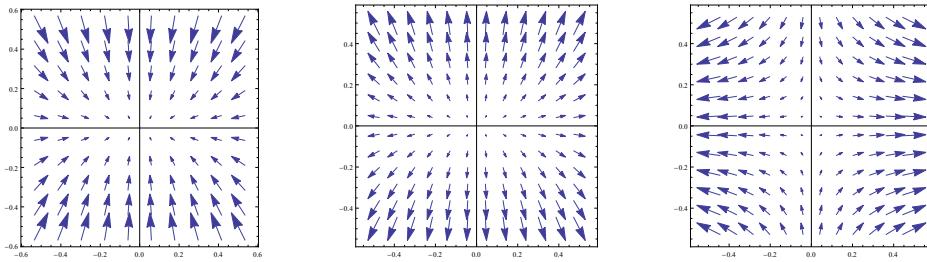
REŠENJE:

- Vektorsko polje u okolini stabilnog čvora (Slika 17-(a)) je oblika kao na Slici 13-(levo), pa je $I = +1$.
- Vektorsko polje u okolini nestabilnog čvora je kao na Slici 17-(b). Indeks nestabilnog čvora je takođe $I = +1$, jer je jedina razlika u orijentaciji vektora, a prema svojstvu (B) indeks se ne menja.



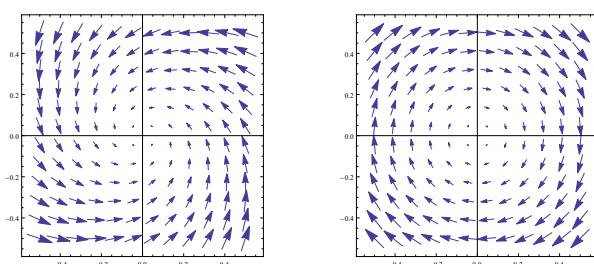
Slika 16: Indeks položaja ravnoteže vektorskog polja \sim (a) nestabilan čvor; (b) sedlo; (c) centar

- Vektorsko polje u okolini sedla (Slika 17-(c)) je oblika kao na Slici 13-(desno), pa je $I = -1$.



Slika 17: Vektorsko polje u okolini (a) stabilnog čvora; (b) nestabilnog čvora; (c) sedla

- Vektorsko polje u okolini stabilnog fokusa je kao na Slici 18-(a), pa je $I = +1$. Indeks nestabilnog fokusa je takođe $I = +1$, jer se prema svojstvu (B) indeks se ne menja.
- Vektorsko polje u okolini centra je kao na Slici 18-(b), pa je $I = +1$.



Slika 18: Vektorsko polje u okolini (a) stabilnog fokusa; (b) centra

Indeks se može odrediti izračunavanjem krivolinijskog integrala (14) uzimajući za proizvoljnu krivu koja okružuje PR $(0, 0)$ jediničnu kružnicu

$$\mathcal{C} : \quad x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

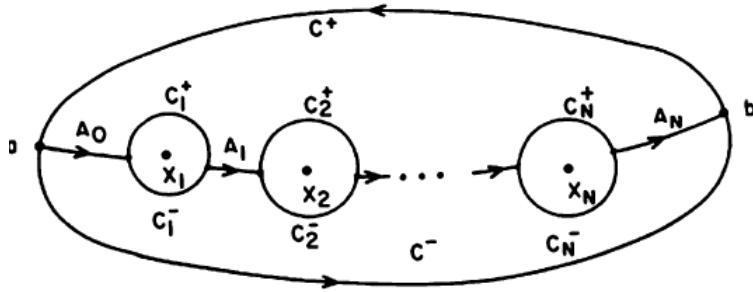
i za vektorska polja $F(x, y) = (f(x, y), g(x, y))$:

- za čvor: $F(x, y) = (x, y)$
- za fokus: $F(x, y) = (x + y, -x + y)$
- za centar: $F(x, y) = (y, -x)$
- za sedlo: $F(x, y) = (x, -y)$ \otimes

Teorema 6 [Poenkareova indeksna teorema] Neka je $F \in C^1(E)$, gde je E otvoren podskup od \mathbb{R}^2 koji sadrži zatvorenu krivu \mathcal{C} i \mathcal{D} ograničena oblast čiji je rub $\partial\mathcal{D} = \mathcal{C}$. Ako su $X_1^*, X_2^*, \dots, X_N^*$ singularne tačke tog vektorskog polja unutar oblasti \mathcal{D} i ako je $F(X) \neq 0$ za svako $X \in \mathcal{C}$, onda važi

$$I_{\mathcal{C}}(F) = I_1 + I_2 + \cdots + I_N$$

gde je $I_k = I_F(X_k^*)$ indeks singularne tačke X_k^* vektorskog polja F .



Slika 19: Poenkareova indeksna teorema

SKICA DOKAZA: Konstruišimo kružnice C_i sa centrima u PR x_i , $i = 1, 2, \dots, N$ (Slika 19) tako da unutar kruga nema drugih PR i duži A_i , $i = 0, 1, \dots, N$ koje spajaju krivu \mathcal{C} i kružnice C_i , a kojima su kružnice C_i podeljene na gornje i donje polukružnice C_i^+ i C_i^- . Neka je

$$J_1 = C^+ \cup A_0^+ \cup C_1^+ \cup A_1^+ \cup \cdots \cup C_N^+ \cup A_N^+$$

$$J_2 = C^- \cup A_N^- \cup C_N^- \cup \cdots \cup A_1^- \cup C_1^- \cup A_0^-$$

Tada prema Teoremi 4 je $I_{J_1} = I_{J_2} = 0$, odakle kako su C_i^+ i C_i^- obe negativne orijentacije biće

$$\begin{aligned} 0 &= I_{J_1} + I_{J_2} = I_{C^+} + I_{A_0^+} - I_{C_1^+} + I_{A_1^+} + \cdots - I_{C_N^+} + I_{A_N^+} \\ &\quad + I_{C^-} + I_{A_N^-} - I_{C_N^-} + \cdots + I_{A_1^-} - I_{C_1^-} + I_{A_0^-} \end{aligned}$$

odnosno kako je $A_0^+ = A_0^-$ dobija se

$$0 = I_C - \sum_{k=1}^N I_{C_k} \Rightarrow I_C = \sum_{k=1}^N I_k.$$

Teorema 7 Indeks zatvorene trajektorije DS (1) u odnosu na vektorsko polje $F = (f, g)$ je jednak +1.

Iz Teoreme 6 i Teoreme 7 sledi:

Teorema 8 Zbir indeksa položaja ravnoteže DS unutar zatvorene trajektorije odnosno graničnog cikla DS je jednak +1.

Iz Teoreme 8 i Primera 4.9. sledi:

- Ako zatvorenatajektorija okružuje samo jedan PR, onda PR nije sedlo.
- Ako DS nema drugih PR izuzev sedla, taj DS nema ni zatvorenih trajektorija.

Primer 4.10. Za dinamički sistem

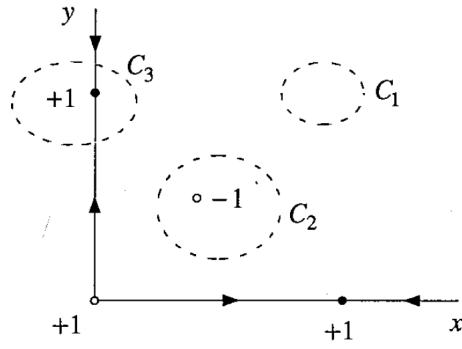
$$\begin{aligned} x' &= x(3 - x - 2y) \\ y' &= y(2 - x - y) \end{aligned}$$

dokazati da ne postoji granični cikl.

REŠENJE: DS ima četiri PR:

- $O(0, 0)$ - nestabilan čvor
- $X_1(0, 2)$ - stabilan čvor
- $X_2(3, 0)$ - stabilan čvor
- $X_3(1, 1)$ - sedlo

Kako je za $x = 0$: $x' = 0$, $y' = y(2 - y)$, duž y -ose pravac vektorskog polja je \uparrow za $0 < y < 2$, a \downarrow za $y < 0$ i $y > 2$. Kako je za $y = 0$: $y' = 0$, $x' = x(3 - x)$, duž x -ose pravac vektorskog polja je \rightarrow za $0 < x < 3$, a \leftarrow za $x < 0$ i $x > 3$. Dakle, koordinatne ose su pravolinijske trajektorije. Indeksi PR prikazani su na Slici 20. Ako bi postojao granični cikl, zatvorenatajektorija bi mogla da se nalazi u tri kvalitativno različita položaja C_1, C_2, C_3 prikazana na Slici 20.



Slika 20: Primer 4.10. - indeks položaja ravnoteže

- zatvorena trajektorija C_1 ne može postojati, jer ne okružuje niti jedan PR - prema Teoremi 5;
- zatvorena trajektorija C_2 ne može postojati, jer zbir indeksa položaja ravnoteže unutar graničnog cikla mora biti jednak +1 (Teorema 8);
- kako je $x' = 0$ za $x = 0$ i $y' = 0$ za $y = 0$ koordinatne ose su invarijantni skupovi DS i sadrže pravolinijske trajektorije. Zatvorena trajektorija C_3 (koja okružuje jedan od PR X_1, X_2, O na koordinatnim osama) ne može postojati, iako je zbir indeksa položaja ravnoteže unutar nje jednak +1. Naime, takva bi zatvorena trajektorija uvek presecala neku od koordinatnih osa koje su pravolinijske trajektorije, što je u suprotnosti sa činjenicom da se trajektorije DS ne mogu seći. Iz istih razloga ne može postojati zatvorena trajektorija koja okružuje PR X_1, X_3 i O ili X_2, X_3 i O (iako bi zbir indeksa PR unutar takve zatvorene trajektorije bio jednak +1). \square