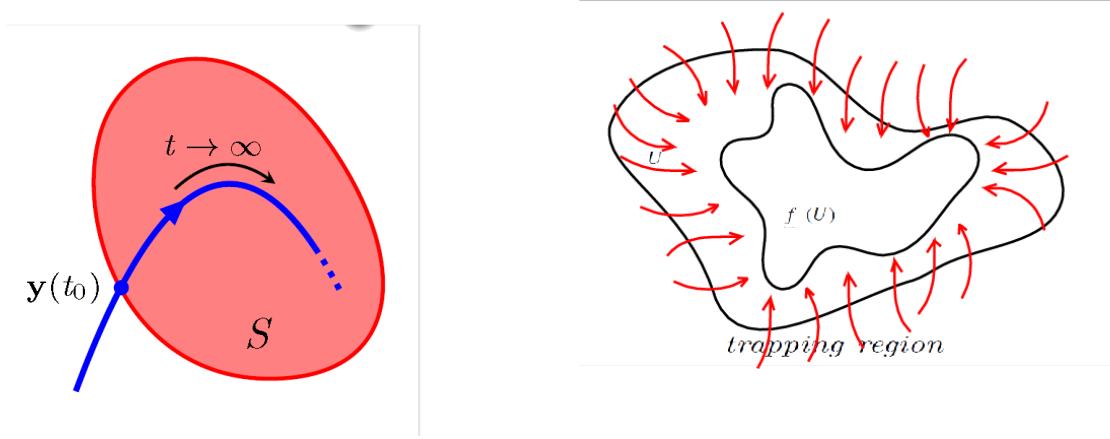


## 4.2. Invarijantan skup DS

Vrlo bitan pojam u ispitivanju egzistencije graničnog cikla je pojam invarijantnog skupa DS

$$(1) \quad X' = F(X), \quad X \in E \subset \mathbb{R}^2.$$

**Definicija 4** Neka je skup  $E \subset \mathbb{R}^n$  otvoren,  $F \in C^1(E)$  i neka je  $\phi^t : E \rightarrow E$  tok DS (1). Skup  $\mathbb{S} \subset E$  je **invarijantan skup u odnosu na tok  $\phi^t$**  DS, ako je  $\phi^t(\mathbb{S}) \subset \mathbb{S}$  za svako  $t \in \mathbb{R}$ . Skup  $\mathbb{S} \subset E$  je **pozitivno (negativno) invarijantan skup u odnosu na tok  $\phi^t$**  DS, ako je  $\phi^t(\mathbb{S}) \subset \mathbb{S}$  za svako  $t \geq 0$  ( $t \leq 0$ ).



Slika 17: (a) Pozitivno invarijantan skup DS; (b) "trapping region"

Dakle, skup  $\mathbb{S}$  je pozitivno invarijantan ako svaka trajektorija koja u početnom trenutku  $t = 0$  polazi iz  $\mathbb{S}$  ostaje u  $\mathbb{S}$  za svako  $t > 0$ . Da bi proverili da je zatvoren i ograničen skup  $\mathbb{S}$  pozitivno invarijantan, dovoljno je utvrditi da polje pravaca DS na rubu oblasti "vodi" ka unutrašnosti skupa. Zatvoren, ograničen, pozitivno invarijantan skup  $\mathbb{S}$  u engleskoj literaturi naziva se "trapping region". Analogno, da bi proverili da je zatvoren i ograničen skup  $\mathbb{S}$  negativno invarijantan, dovoljno je utvrditi da polje pravaca DS na rubu oblasti "vodi" ka spoljašnosti skupa. Zatvoren, ograničen, negativno invarijantan skup  $\mathbb{S}$  u engleskoj literaturi naziva se "repelling region".

1. Ako je  $X^*$  PR DS, onda je skup  $\{X^*\}$  invarijantan. Svaka trajektorija DS je invarijantan skup;

2. U Primeru 3.3. može se pokazati da je skup

$$\mathbb{S} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + \frac{y^2}{3} = 0 \right\}$$

(separatrisa, odnosno stabilna mnogostruktost sedla) invarijantan. Naime, ako je  $\mathbf{X}_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{S}$ , tj.  $x_0 = -y_0^2/3$ , sledi da

$$\phi^t(\mathbf{X}_0) = \begin{pmatrix} -\frac{y_0^2}{3} e^{-2t} \\ y_0 e^{-t} \end{pmatrix} \in \mathbb{S},$$

odakle zaključujemo da  $\phi^t(\mathbb{S}) \subset \mathbb{S}$  za svako  $t \in \mathbb{R}$ .

3. U Primeru 4.2 prsten  $\Pi_1 = \{(r, \theta) \mid 1/2 < r < 3/2\}$  pozitivno invarijantan skup DS, dok je prsten  $\Pi_2 = \{(r, \theta) \mid 3/2 < r < 5/2\}$  negativno invarijantan skup DS (videti Sliku 23). Krug  $\Pi_3 = \{(r, \theta) \mid 0 < r < 1\}$  je invarijantan skup DS.

**Primer 4.11.** Posmatrajmo dinamički sistem

$$(2) \quad \begin{aligned} x' &= x(1 - x - y) \\ y' &= y(4 - 7x - 3y) \end{aligned}$$

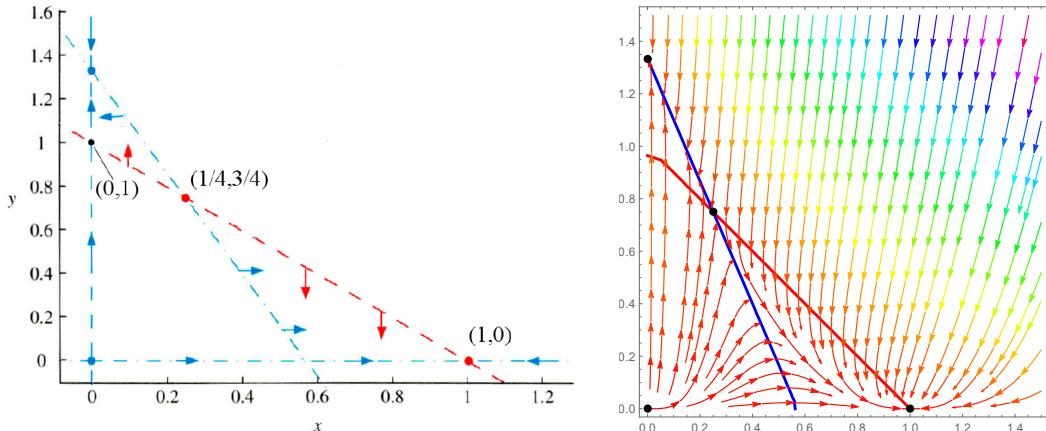
DS ima četiri PR:

- $(0, 0)$  - nestabilan čvor
- $(0, 4/3)$  - stabilan čvor
- $(1, 0)$  - stabilan čvor
- $(1/4, 3/4)$  - sedlo

$x$ -NULA-IZOKLINE DS su prave  $x = 0$  i  $x + y = 1$ , a  $y$ -NULA-IZOKLINE su prave  $y = 0$  i  $7x + 3y = 4$ .

- $x$ - nula-izoklina  $x = 0$  i  $y$ - nula-izoklina  $y = 0$  seku se u PR  $(0, 0)$
- $x$ - nula-izoklina  $x + y = 1$  i  $y$ - nula-izoklina  $y = 0$  seku se u PR  $(1, 0)$
- $x$ - nula-izoklina  $x = 0$  i  $y$ - nula-izoklina  $7x + 3y = 4$  seku se u PR  $(0, 4/3)$
- $x$ - nula-izoklina  $x + y = 1$  i  $y$ - nula-izoklina  $7x + 3y = 4$  seku se u PR  $(1/4, 3/4)$

Odredimo vektorsko polje duž  $x$ -nula izoklina i  $y$ -nula izoklina u I kvadrantu:



Slika 18: Primer 4.11. ~ (a)  $x$ -nula-izokline i  $y$ -nula-izokline; (b) fazni portret DS

- $y$ -NULA-IZOKLINA  $y = 0$ :

- $x' = x(1 - x) > 0$  za  $0 < x < 1$  :  $\rightarrow$
- $x' = x(1 - x) < 0$  za  $x > 1$  :  $\leftarrow$

- $y$ -NULA-IZOKLINA  $7x + 3y = 4$ :

- $x' = \frac{x(4x-1)}{3} > 0$  za  $x > \frac{1}{4}$  :  $\rightarrow$
- $x' = \frac{x(4x-1)}{3} < 0$  za  $0 < x < \frac{1}{4}$  :  $\leftarrow$

- $x$ -NULA-IZOKLINA  $x = 0$ :

- $y' = y(4 - 3y) > 0$  za  $0 < y < \frac{4}{3}$  :  $\uparrow$
- $y' = y(4 - 3y) < 0$  za  $y > \frac{4}{3}$  :  $\downarrow$

- $x$ -NULA-IZOKLINA  $x + y = 1$ :

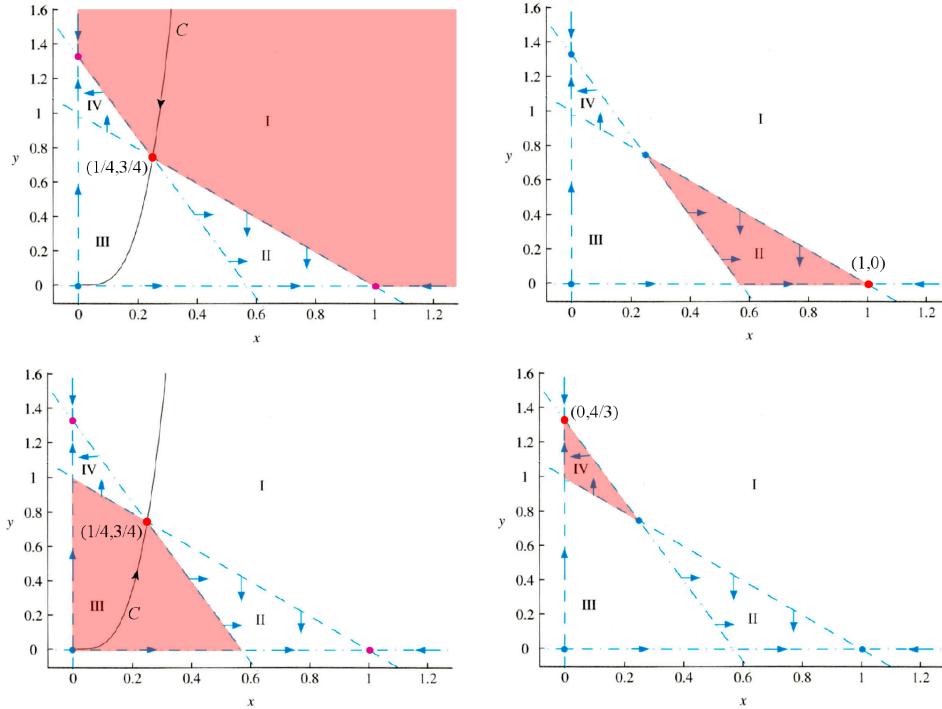
- $y' = y(4y - 3) > 0$  za  $y > \frac{3}{4}$ :  $\uparrow$
- $y' = y(4y - 3) < 0$  za  $0 < y < \frac{3}{4}$ :  $\downarrow$

\*  $\{(x, 0) \mid 0 < x < 1\}$  je invarijantan skup DS.

\*  $\{(x, 0) \mid 1/2 < x < 1\}$  je pozitivno invarijantan skup DS.

\*  $\{(x, 0) \mid 0 < x < 1/2\}$  je negativno invarijantan skup DS.

Kako je  $x' = 0$  za  $x = 0$ , duž  $y$ -ose tok DS je vertikalni i kako je  $y' = 0$  za  $y = 0$ , duž  $x$ -ose tok DS je horizontalan. To znači da su koordinatne ose *invarijantni skupovi* DS.

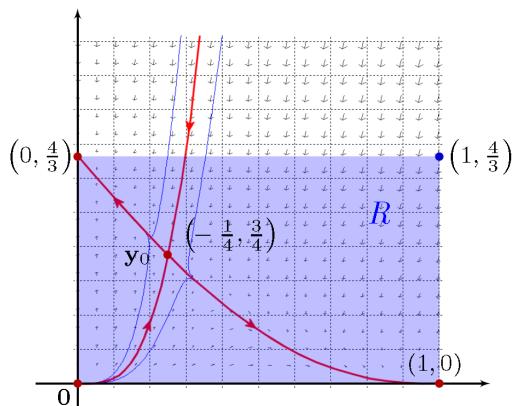


Slika 19: Primer 4.11.  $\sim$  skupovi I i III nisu invarijantni skupovi DS (2), dok skupovi II i IV jesu invarijantni skupovi DS (2)

Ispitati da li su skupovi I, II, III i IV na Slici 19 invarijantni skupovi DS (2) (kriva  $C$  je stabilna mnogostruktost sedla  $(1/4, 3/4)$ ).

1. Oblast I (Slika 19 - gore-levo) nije invarijantan skup DS, ali jeste negativno invarijantan skup DS
  - (i) strelice u faznom portretu u svakoj tački oblasti I su ↘
  - (ii) sve trajektorije duž krive  $C$  se približavaju sedlu  $(1/4, 3/4)$  - deo krive  $C$  u oblasti I je invarijantan skup
  - (iii) postoje trajektorije koje počinju iz tačke desno od  $C$ , a koje izlaze iz skupa I i završavaju u oblasti II privučene ka PR  $(1, 0)$  (slika 20-(b)) -
  - (iv) postoje trajektorije koje počinju iz tačke levo od  $C$ , a koje izlaze iz skupa I i završavaju u oblasti IV privučene ka PR  $(0, 4/3)$
2. Oblast II (Slika 19 - gore-desno) je pozitivno invarijantan skup DS. Sve trajektorije koje polaze iz tačke oblasti II biće privučene ka PR  $(1, 0)$ . Trajektorije ne mogu izaći iz skupa II ni kroz jednu stranicu tog trougla (polje pravaca vodi ka unutrašnjosti)
3. Oblast III (Slika 19 - dole-levo) nije invarijantan skup DS, ali jeste negativno invarijantan skup DS

- (i) strelice u faznom portretu u svakoj tački oblasti I su  $\nearrow$
  - (ii) sve trajektorije duž krive  $C$  se približavaju sedlu  $(1/4, 3/4)$
  - (iii) sve trajektorije koje počinju iz tačke desno od  $C$  izlaze iz skupa III i završavaju u oblasti II privučene ka PR  $(1, 0)$  (slika 20-(b))
  - (iv) sve trajektorije koje počinju iz tačke levo od  $C$  izlaze iz skupa III i završavaju u oblasti IV privučene ka PR  $(0, 4/3)$
4. Oblast IV (Slika 19 - dole-desno) je pozitivno invarijantan skup DS. Sve trajektorije koje polaze iz tačke oblasti IV biće privučene ka PR  $(0, 4/3)$ . Trajektorije ne mogu izaći iz skupa IV ni kroz jednu stranicu tog trougla (polje pravaca vodi ka unutrašnjosti).



Slika 20: Primer 4.11.  $\sim R$  je invarijantan skup DS

Pokažimo da je pravougaonik  $R = \{(x,y) \mid 0 < x < 1, 0 < y < 4/3\}$  pozitivno invarijantan skup DS (2) (Slika 20.).

- $y = 0, 0 < x < 1$ : kako je  $x' = x(1-x) > 0$  za  $0 < x < 1$ , strelice u faznom portretu usmerene su na desno  $\rightarrow$ .
- $y = 4/3, 0 < x < 1$ : kako je  $x' = -(x + \frac{1}{3})x < 0, y' = -\frac{28}{3}x < 0$  za  $0 < x < 1$ , strelice u faznom portretu su  $\swarrow$ .
- $x = 0, 0 < y < 4/3$  : kako je  $y' = y(4 - 3y) > 0$  za  $0 < y < 4/3$ , strelice u faznom portretu su usmerene nagore  $\uparrow$ .
- $x = 1, 0 < y < 4/3$  : kako je  $x' = -y < 0$  i  $y' = -3y(y + 1) < 0$  za  $0 < y < 4/3$ , strelice u faznom portretu su  $\swarrow$ .

Dakle, sve strelice u faznom portretu u tačkama ruba pravougaonika  $R$  usmerene su ka njegovoj unutrašnjosti ili u pravcu stranica pravougaonika. Prema tome, sve fazne trajektorije koje polaze iz tačke pravougaonika  $\Pi$  ostaju "zarobljene" unutar pravougaonika, pa je  $R$  pozitivno invarijantan skup DS.  $\square$

### 4.3. Egzistencija graničnog cikla DS

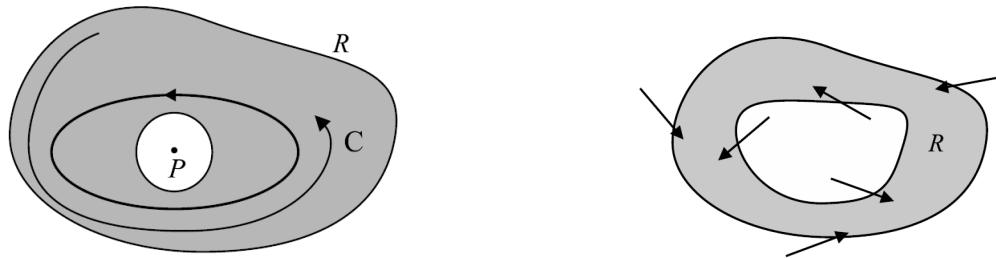
**Teorema 9 (Teorema Poenkare–Bendiksona)** *Neka važi:*

1.  $F \in C^1(\mathcal{R})$ ;
2.  $\mathcal{R}$  je zatvoren i ograničen podskup fazne ravni;
3.  $\mathcal{R}$  ne sadrži nijedan PR;
4. postoji fazna trajektorija  $\gamma$  koja u početnom trenutku  $t_0$  polazi iz neke tačke oblasti  $\mathcal{R}$  i ostaje u  $\mathcal{R}$  za svako  $t > t_0$ .

Tada je  $\gamma$  ili zatvorena trajektorija, ili se spiralno približava zatvorenoj trajektoriji DS (1). U oba slučaja, postoji granični cikl u  $\mathcal{R}$ .

Teoremu Poenkare–Bendiksona možemo formulisati i na sledeći način: *Ako je  $\mathcal{R}$  zatvoren i ograničen podskup fazne ravni, koji je pozitivno invarijantan za DS (1) i ne sadrži ni jedan PR, onda postoji granični cikl u  $\mathcal{R}$ .*

Napomenimo, da važi Teorema Poenkare–Bendiksona i u suprotnoj vremenskoj orijentaciji, tj. ako pretpostavimo da postoji fazna trajektorija  $\gamma$  koja u početnom trenutku  $t_0$  polazi iz neke tačke oblasti  $\mathcal{R}$  i ostaje u  $\mathcal{R}$  za svako  $t < t_0$ , odnosno ako je  $\mathcal{R}$  zatvoren, ograničen podskup fazne ravni, koji je negativno invarijantan za DS (1) i ne sadrži ni jedan PR, onda postoji granični cikl u  $\mathcal{R}$ .



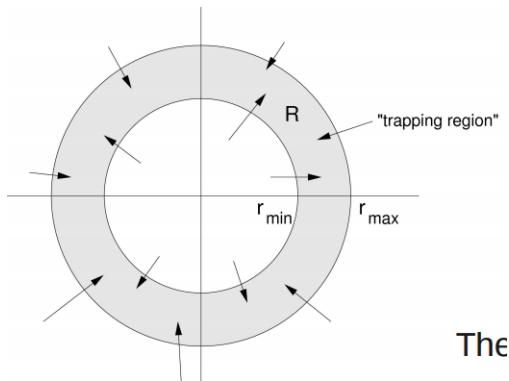
Slika 21: (a) Teorema Poenkare–Bendiksona (b) Princip prstena

Postavlja se pitanje kako proveriti da trajektorija  $\gamma$  ostaje "zatvorena" u  $\mathcal{R}$ , odnosno kako odrediti zatvoren, ograničen, pozitivno invarijantan skup  $\mathcal{R}$  ("trapping region"). Često se koristi sledeći **PRINCIPI PRSTENA**:

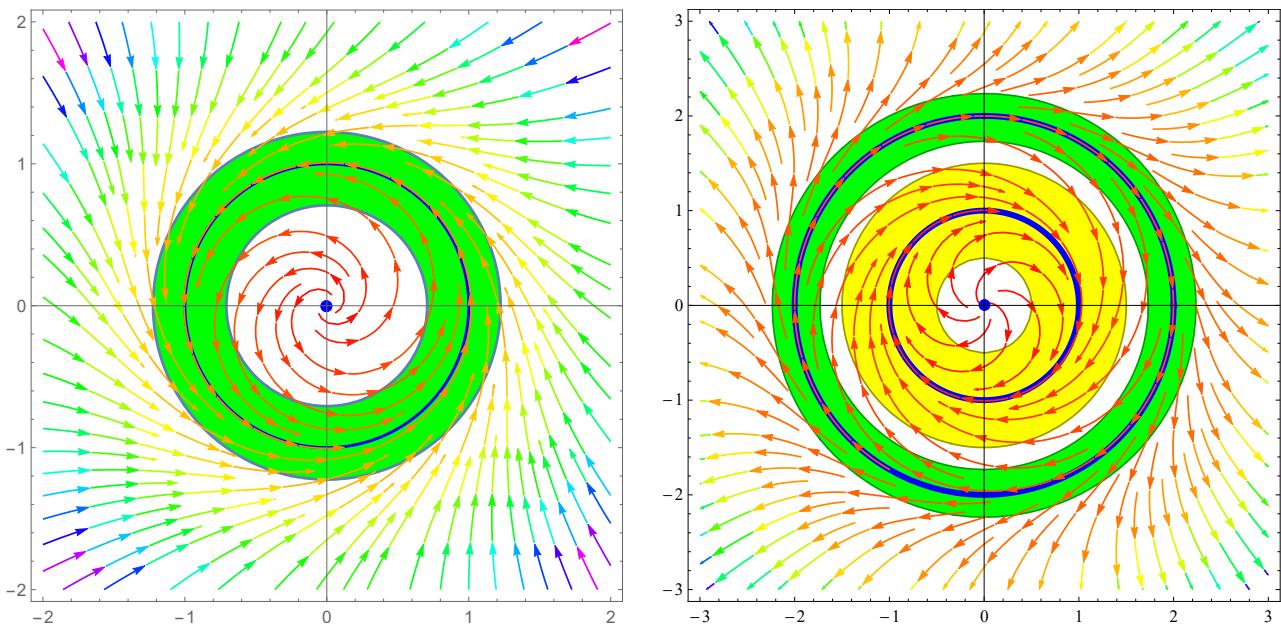
**Teorema 10 (Princip prstena)** Neka u faznoj ravni postoji prsten  $\mathcal{R}$  ograničen dvema glatkim krivama  $L_1$  i  $L_2$ , koji ne sadrži položaj ravnoteže DS (1). Ako sve fazne trajektorije, presecajući  $L_1$  i  $L_2$  ulaze u  $\mathcal{R}$ , za  $t > 0$  ili za  $t < 0$ , tada u  $\mathcal{R}$  postoji najmanje jedan granični cikl.

Ako je prsten  $\mathcal{R} : r_{min} < r < r_{max}$  "trapping region" ("repelling region"), tada postoji bar jedna trajektorija koja ako polazi iz  $\mathcal{R}$  ostaje u  $\mathcal{R}$  sve vreme (ili kada  $t \rightarrow \infty$ , odnosno kada  $t \rightarrow -\infty$ ).

$$\begin{cases} r' > 0, & \text{na } r = r_{min} \\ r' < 0, & \text{na } r = r_{max} \end{cases} \quad \text{ili} \quad \begin{cases} r' < 0, & \text{na } r = r_{min} \\ r' > 0, & \text{na } r = r_{max} \end{cases}$$



Slika 22: "trapping reagion"



Slika 23: "trapping region" i granični cikl DS za: (a) Primer 4.1. (b) Primer 4.2.

**Primer 4.1A.** Posmatrajmo, nelinearni DS (4.2) u **Primeru 4.1.** Prelaskom na polarne koordinate  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$  dobijamo nelinearan sistem oblika (4.3). Kako je  $r' > 0$  za  $0 < r < 1$  i  $r' < 0$  za  $r > 1$ , skup  $\mathcal{R} : 1/2 \leq r \leq 3/2$  je kompaktan, pozitivno invarijantan skup datog DS (Slika 23-(a) & zeleni prsten) koji ne sadrži ni jedan PR, pa se prema Teoremi Poenkare–Bendiksona u  $\mathcal{R}$  nalazi granični cikl  $r = 1$ , odnosno  $x^2 + y^2 = 1$ .  $\square$

**Primeru 4.2A.** Za DS u polarnim koordinatama (4.5) kako je  $r' > 0$  za  $0 < r < 1$ ,  $r' < 0$  za  $1 < r < 2$  i  $r' > 0$  za  $r > 2$ , prsten

$$\Pi_1 = \{(r, \theta) \mid 1/2 \leq r \leq 3/2\}$$

je kompaktan, pozitivno invarijantan skup DS (Slika 23-(b) & žuti prsten) koji ne sadrži ni jedan PR, pa se prema Teoremi Poenkare–Bendiksona u  $\Pi_1$  nalazi granični cikl  $r = 1$ . Prsten

$$\Pi_2 = \{(r, \theta) \mid \sqrt{3} \leq r \leq \sqrt{5}\}$$

je kompaktan, negativno invarijantan skup DS (Slika 23-(b) & zeleni prsten) koji ne sadrži ni jedan PR, odnosno fazne trajektorije "ulaze" u  $\Pi_2$  za  $t < 0$ , tj. izlaze iz  $\Pi_2$  za  $t > 0$ , pa zaključujemo da se u prstenu  $\Pi_2$  nalazi granični cikl  $r = 2$ .  $\square$

**Primer 4.12.** Za dinamički sistem

$$\begin{aligned} x' &= x - y - x^3 \\ y' &= x + y - y^3 \end{aligned}$$

dokazati egzistenciju graničnog cikla.

**REŠENJE:** Tačka  $(0, 0)$  je jedini položaj ravnoteže. Kako su sopstvene vrednosti matrice

$$J = J(0, 0) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\lambda_{1,2} = 1 \pm i$ , koordinatni početak je nestabilan fokus nelinearnog DS.

Prelaskom na polarne koordinate DS se transformiše u sistem

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= r[1 - r^2(\cos^4 \varphi + \sin^4 \varphi)] \\ \frac{d\varphi}{dt} &= 1 - r^2(\sin^3 \varphi \cos \varphi - \cos^3 \varphi \sin \varphi). \end{aligned}$$

Kako je  $\cos^4 \varphi + \sin^4 \varphi = 1/2 + 1/2 \cos^2 2\varphi$ , to je  $1/2 \leq \cos^4 \varphi + \sin^4 \varphi \leq 1$ . S druge strane, iz identiteta

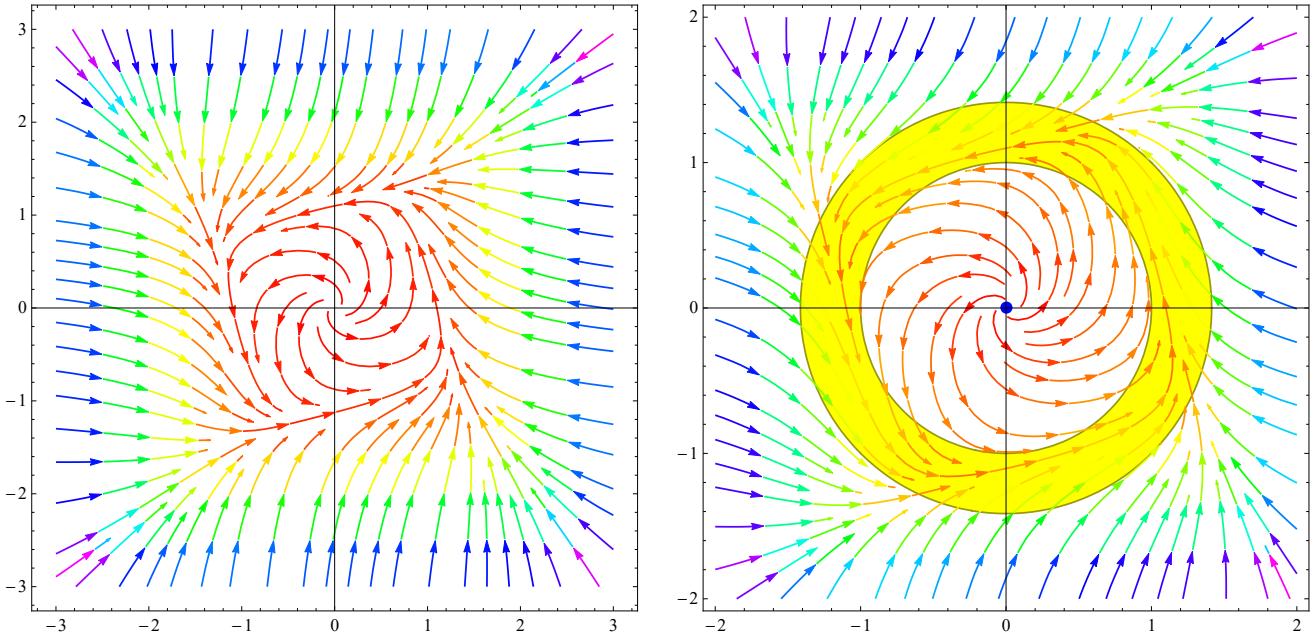
$$-(\sin^3 \varphi \cos \varphi - \cos^3 \varphi \sin \varphi) = \frac{1}{2} \sin 2\varphi \cos 2\varphi = \frac{1}{4} \sin 4\varphi,$$

zaključujemo da je  $-1/4 \leq -(\sin^3 \varphi \cos \varphi - \cos^3 \varphi \sin \varphi) \leq 1/4$ . Dakle,

$$1 - r^2 \leq 1 - r^2(\cos^4 \varphi + \sin^4 \varphi) \leq 1 - \frac{r^2}{2} \Rightarrow 1 - r^2 \leq \frac{r'}{r} \leq 1 - \frac{r^2}{2},$$

odakle zaključujemo da je  $r' > 0$  za  $0 < r < 1 = r_{min}$ , i  $r' < 0$  za  $r > \sqrt{2} = r_{max}$ . Dakle, prsten  $\mathcal{R} : 1 \leq r \leq \sqrt{2}$  je "trapping region", jer je

$$\left. \frac{dr}{dt} \right|_{r=1} = 1 - (\cos^4 \varphi + \sin^4 \varphi) \geq 0, \quad \left. \frac{dr}{dt} \right|_{r=\sqrt{2}} = \sqrt{2} [1 - 2(\cos^4 \varphi + \sin^4 \varphi)] \leq 0.$$



Slika 24: Fazni portret i "trapping region" DS u Primeru 4.12.

Prema tome, polazeći iz oblasti  $r < 1$ , odnosno  $r > \sqrt{2}$ , sa rastom  $t$  sve fazne trajektorije seku krivu  $r = 1$ , odnosno  $r = \sqrt{2}$ , i ulaze u prsten  $1 \leq r \leq \sqrt{2}$ . Po Teoremi 10 sledi da unutar prstena  $1 \leq r \leq \sqrt{2}$  postoji bar jedan granični cikl ovog dinamičkog sistema. Može se dokazati da je to jedini granični cikl koji je, jasno, stabilan. Fazni portreti datog nelinearnog sistema i "trapping region" prikazani su na Slici 24-(a) i (b).  $\square$

**Primer 4.13.** Za dinamički sistem

$$\begin{aligned} x' &= y - 8x^3 \\ y' &= 2y - 4x - 2y^3 \end{aligned}$$

dokazati egzistenciju graničnog cikla.

REŠENJE: Jedini PR DS je koordinatni početak. Kako su sopstvene vrednosti matrice

$$J = J(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_{1,2} = 1 \pm i\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow q = \det J = 4 > 0, \quad p = \text{tr } J = 2 > 0, \quad \Delta = p^2 - 4q = -12 < 0$$

koordinatni početak je nestabilan fokus nelinearnog DS.

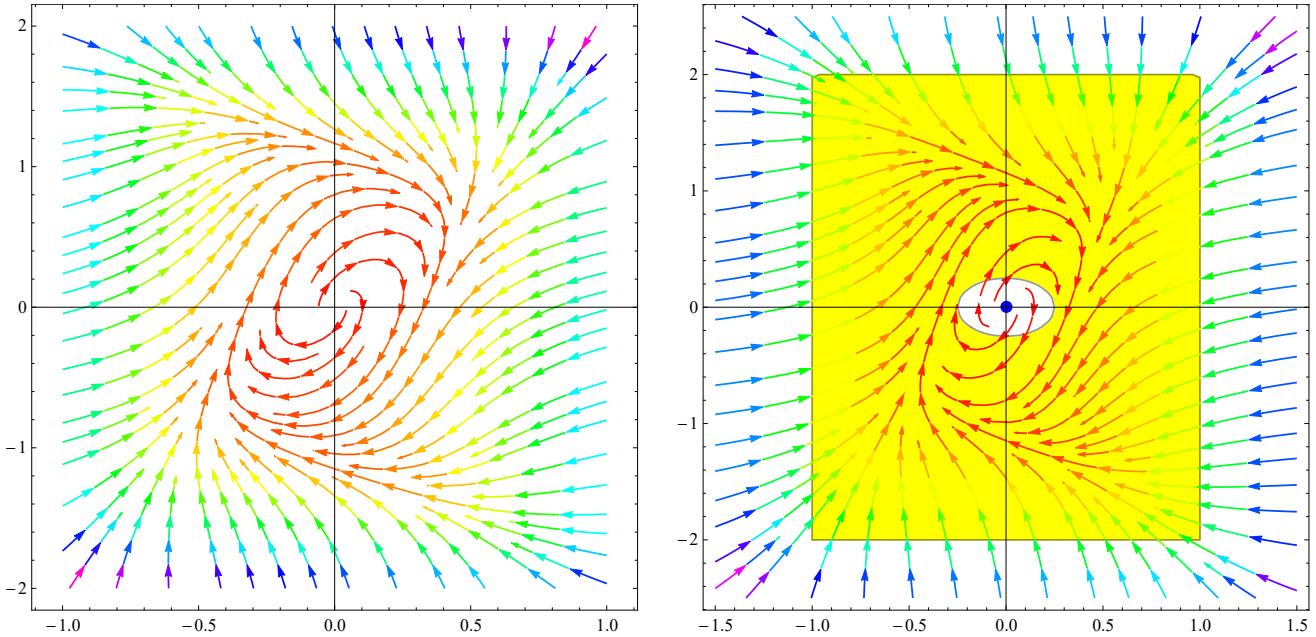
Posmatrajmo pravougaonik  $\Pi$  sa temenima  $(-1, 2)$ ,  $(1, 2)$ ,  $(1, -2)$ ,  $(-1, -2)$ , tj. neka je

$$\Pi = \{(x, y) \mid -1 \leq x \leq 1, -2 \leq y \leq 2\}.$$

Na stranicama pravougaonika je:

- $y = 2, |x| \leq 1$ :  $x' = 2(1 - 4x^3) \leq 0, y' = -4x - 12 < 0$ ;  
pravac vektorskog polja je  $\searrow$  ili  $\swarrow$ ;
- $y = -2, |x| \leq 1$ :  $x' = -2(1 + 4x^3) \leq 0, y' = -4x + 12 > 0$ ;  
pravac vektorskog polja je  $\nwarrow$  ili  $\nearrow$ ;
- $x = 1, |y| \leq 2$ :  $x' = y - 8 < 0, y' = 2y - 4 - 2y^3 \leq 0$ ;  
pravac vektorskog polja je  $\nwarrow$  ili  $\swarrow$ ;
- $x = -1, |y| \leq 2$ :  $x' = y + 8 > 0, y' = 2y + 4 - 2y^3 \leq 0$ ;  
pravac vektorskog polja je  $\nearrow$  ili  $\searrow$ .

Fazni portet datog nelinearnog sistema prikazan je na Slici 25. Očigledno ako fazna trajektorija  $\gamma$  u početnom momentu  $t_0$  polazi iz neke tačke oblasti  $\Pi$ , ostaje u  $\Pi$  za svako  $t > t_0$ , odnosno  $\Pi$  je kompaktan, pozitivno invarijantan skup DS. Ali ne može se primeniti Teorema Poenkare–Bendiksona jer pravougaonik sadrži PR  $(0, 0)$ . Međutim, kako je PR nestabilan možemo posmatrati proizvoljnu okolinu  $\mathbb{O}$  oko koordinatnog početka - npr. rub okoline  $\mathbb{O}$  može biti kružnica sa centrom u  $(0, 0)$  i proizvoljno malog poluprečnika. Fazne trajektorije presecajući tu kružnicu izlaze iz okoline  $\mathbb{O}$  i ulaze u pravougaonik  $\Pi$ . Dakle, možemo primeniti princip prstena i zaključiti da postoji granični cikl unutar pravougaonika  $\Pi$  i izvan okoline  $\mathbb{O}$ .  $\blacksquare$



Slika 25: Fazni portret i "trapping region" DS u Primeru 4.13.

**Primer 4.11A.** Iako je pravougaonik  $R$  pozitivno invarijantan skup DS (2), Teorema Poenkare–Bendiksona ne može se primeniti, jer ako bi posmatrali kompaktan skup

$$\bar{R} = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 4/3\}$$

onda  $(0, 0) \in \partial R$ ,  $(1, 0) \in \partial R$ ,  $(0, 4/3) \in \partial R$ , odnosno tri PR pripadaju zatvorenom i ograničnom skupu  $\bar{R}$ . Primetimo, da analogno diskusiji u Primeru 4.10., koristeći indeks PR, i u ovom primeru možemo doći do zaključka da ne postoje zatvorene trajektorije datog DS.  $\square$

**Primer 4.14.** Za dinamički sistem (Selikov model glikolize):

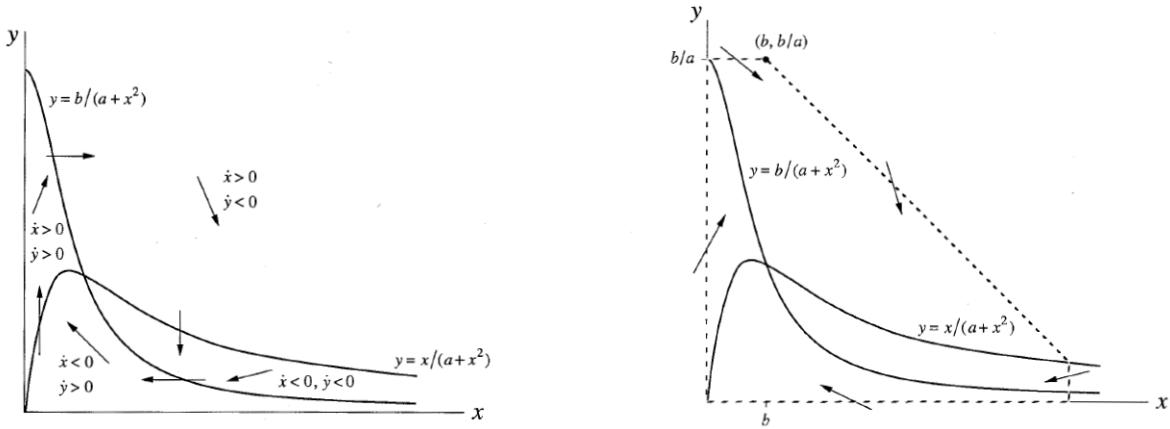
$$\begin{aligned} x' &= -x + ay + x^2y \\ y' &= b - ay - x^2y, \end{aligned}$$

odrediti vrednosti parametra  $a > 0$ ,  $b > 0$  za koje postoji granični cikl.

**REŠENJE:** Odredimo nula-izokline:

$$x' = 0 \implies y = \frac{x}{a+x^2}, \quad y' = 0 \implies y = \frac{b}{a+x^2}$$

Nula izokline i odgovarajuće polje pravaca prikazani su na Slici 26-(a). Da bi dokazali egzistenciju graničnog cikla, odredimo oblast u kojoj trajektorije ostaju zatvorene (eng. "trapping region"). Posmatrajmo oblast na Slici 26-(b) određena

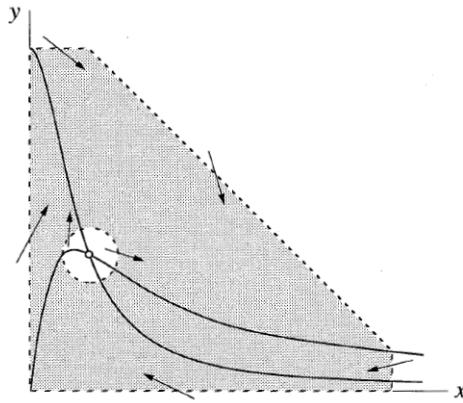


Slika 26: Primer 4.14. - nula izokline

pravama

$$x = 0, \quad y = 0, \quad y = \frac{b}{a}, \quad y = -x + \frac{b}{a} + b, \quad x = \kappa,$$

gde je  $M(\kappa, \mu)$  tačka preseka prave  $p : y = -x + \frac{b}{a} + b$  sa izoklinom  $y = x/(a+x^2)$ . Problematičan deo odredjivanja vektorskog polja je na pravoj  $p$  od tačke  $N(b, b/a)$  do tačke  $M(\kappa, \mu)$ . Kako je  $x' + y' = b - x$ , imamo da je  $y' < -x'$  za  $x > b$ . Kako se deo prave  $p$  između tačaka  $N$  i  $M$  nalazi iznad  $x$ -nula izokline, to je  $y > x/(a+x^2)$ , odnosno  $x' > 0$ . Kako je na delu prave  $p$  između tačaka  $N$  i  $M$  i  $x > b$ , biće  $y'/x' = dy/dx < -1$ , odnosno vektor pravca je pod većim nagibom nego posmatrana prava  $p$ . Prema tome, vektor pravca je duž prave  $p$  usmeren ka unutrašnosti označene oblasti. Očigledno ako fazna trajektorija u početnom trenutku  $t_0$  polazi iz neke tačke posmatrane oblasti ostaje unutar oblasti za svaku  $t > t_0$ .



Slika 27: Primer 4.14. - "trapping region"

Medjutim, još uvek ne možemo primeniti Teorema Poenckare–Bendiksona, jer

oblast koju smo odredili sadrži PR

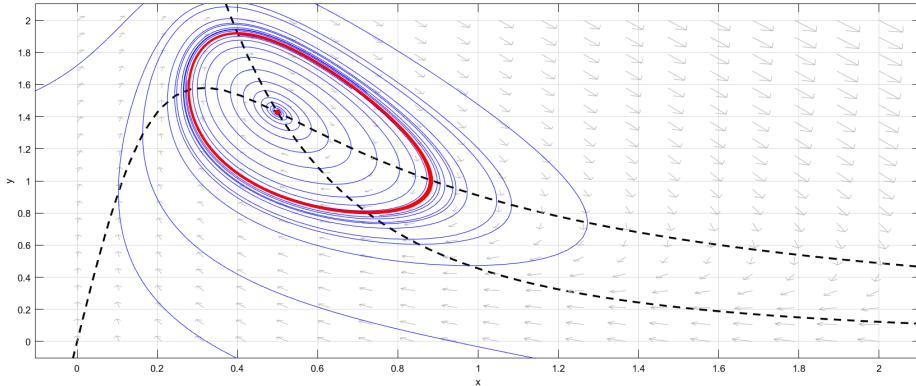
$$E(x^*, y^*), \quad x^* = b, \quad y^* = \frac{b}{a + b^2}$$

koji se nalazi u preseku odgovarajućih nula-izoklina. Ako bi taj PR bio nestabilan, može se posmatrati proizvoljna okolina  $\mathbb{O}$  oko PR (rub okoline  $\mathbb{O}$  može biti kružnica sa centrom u PR proizvoljno malog poluprečnika) - fazne trajektorije tada presecajući tu kružnicu izlaze iz okoline  $\mathbb{O}$  i ulaze u "trapping region" (Slika 27). Primenom Teorema Poenckare–Bendiksona mogli bi zaključiti da postoji granični cikl unutar osenčene oblasti.

Odredimo pod kojim uslovima PR  $E$  je nestabilan. Imamo

$$A = J(x^*, y^*) = \begin{pmatrix} 2x^*y^* - 1 & a + (x^*)^2 \\ -2x^*y^* & -(a + (x^*)^2) \end{pmatrix}$$

$$\implies q = \det A = a + b^2 > 0, \quad p = \text{tr } A = -\frac{b^4 + (2a - 1)b^2 + a + a^2}{a + b^2}$$



Slika 28: Fazni portret DS u Primeru 4.14. za  $a = 0.1$  i  $b = 0.5$

Dakle, PR je nestabilan ako je  $p > 0$  i stabilan ako je  $p < 0$ . Kako je

$$b^4 + (2a - 1)b^2 + a + a^2 = 0 \implies b^2 = \frac{1}{2} (1 - 2a \pm \sqrt{1 - 8a}),$$

za  $a < 1/8$  je  $1 - 2a \pm \sqrt{1 - 8a} > 0$ , pa je  $p > 0$  za

$$\sqrt{\frac{1}{2}(1 - 2a - \sqrt{1 - 8a})} < b < \sqrt{\frac{1}{2}(1 - 2a + \sqrt{1 - 8a})}, \quad a < \frac{1}{8}.$$

Za  $a = 0.1$  biramo  $b \in (0.352786, 0.752786)$ . Fazni portret sistema za  $b = 0.5$  prikazan je na Slici 28.  $\square$

VIDEO: Nastajanje graničnog cikla kod Selkov modela

## NEMA HAOSA U FAZNOJ RAVNI !!

Teorema Poenkare–Bendiksona je vrlo bitan rezultat u nelinearnoj dinamici - ukazuje da je dinamika dvodimenzionalnih DS predvidljiva. Pretpostavimo da postoji zatvorena trajektorija  $C$  u faznoj ravni (sl. 29). Tada bilo koja trajektorija koja polazi iz oblasti unutar krive  $C$  ostaje u unutrašnjosti, jer se trajektorije DS ne mogu seći. Šta se dešava sa tom trajektorijom? Ako postoje fiksne tačke u unutrašnjosti  $C$ , tada trajektorija, naravno, može da se približi nekoj od tih fiksnih tačaka. Ako nema fiksnih tačaka u unutrašnjosti  $C$ , intuitivno je jasno da trajektorije ne mogu da "lutati" unaokolo zauvek.



Slika 29

U faznoj ravni, teorema Poenkare–Bendiksona garantuje da ako je neka trajektorija ograničena u zatvorenoj, ograničenoj oblasti koja ne sadrži fiksne tačke, onda se trajektorija mora približavati zatvorenoj trajektoriji (složenije ponašanje nije moguće!). S druge strane, za  $n \geq 3$  Teorema Poenkare–Bendiksona se više ne može primeniti, tako da trajektorija zatvorena u nekoj ograničenoj oblasti može "lutati" okolo zauvek, odnosno ne mora se približavati položaju ravnoteže ili graničnom ciklu.

TEORIJA HAOSA opisuje ponašanje određenih dinamičkih sistema koji mogu da ispolje dinamiku koja je veoma osjetljiva na početne uslove, popularno nazvan EFEKAT LEPTIRA:

*"Ako leptir zamahne krilima u Pekingu, on može prouzrokovati uragan na Floridi".*

To ne znači da vetar koji nastaje mahanjem leptirovih krila uzrokuje uragan, već da mahanje leptirovih krila može promeniti redosled događaja koji bi se desio da leptir nije mahao krilima. Takođe bi se moglo reći i kako će zamah leptirovih krila sprečiti pojavu uragana na Floridi. Čak i kada bi uspeli uključiti u matematički model sve moguće uticaje na početne uslove, pokazalo bi se da i dalje ne bi mogli u potpunosti predvideti buduća zbivanja.

Glavni problem dugoročnog predviđanja ponašanja haotičnih sistema leži u velikoj osjetljivosti na početne uslove. To je zapravo suština teorije haosa, a znači da i najmanja razlika u početnim uslovima dovodi do različitih konačnih rezultata.

Kao rezultat osetljivosti na početne uslove, ponašanje haotičnih sistema izgleda slučajno. Ovo se događa čak i ako su ti sistemi deterministički, što znači da je njihova dalja dinamika u potpunosti određena početnim uslovima, bez slučajnih faktora. Ovo ponašanje je poznato kao *deterministički haos*, ili prosto HAOS.

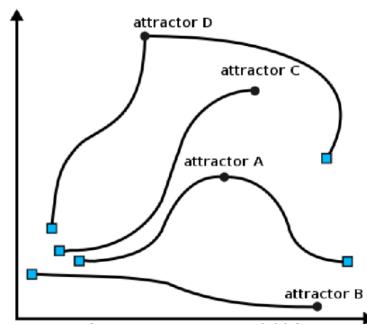
**YOUTUBE VIDEO FAJL:** Uvod u teoriju haosa ili  
*Zašto je dugoročna vremenska prognoza nepouzdana?*

Haotično ponašanje je uočeno u laboratoriji kod mnoštva sistema, uključujući električna kola, lasere, oscilujuće hemijske reakcije, dinamiku fluida, mehaničke i magnetno-mehaničke uređaje. Posmatranja haotičnog ponašanja u prirodi se vrše i kod dinamike satelita Sunčevog sistema, vremena evolucije magnetnog polja nebeskih tela, rasta populacije u ekologiji, dinamici akcionih potencijala kod neurona i molekularnih vibracija. Primeri haotičnih sistema su i matematički modeli kojima se opisuje atmosferske prilike odnosno meteorološke pojave koje se odigravaju u atmosferi (temperatura vazduha, vode, zemljišta, vazdušni pritisak, vlažnost vazduha, oblačnost, vrsta i količina padavina, pravac, smer i brzina veta, itd.).

Jedan od najpoznatijih DS koji imaju svojstvo haotičnosti je *Lorenzov DS*:

$$\begin{aligned}x' &= \sigma(y - x) \\y' &= \rho x - y - xz \\z' &= -\beta z + xy\end{aligned}$$

koji predstavlja jednostavan matematički model konvektivnih strujanja u atmosferi. Iste jednačine pojavljuju se u modelima lasera, diname, električnih kola, termosifonu (sistem sa prirodnim kruženjem - najjednostavniji sistem solarnog zagrevanja vode), DC motora (pretvaranje električne energije u mehaničku) itd.



Slika 30: DS osetljiv na početne uslove  $\sim$  plavi kvadrati = početni uslovi, crni kružici = atraktori

Lorenc je uočio da bi ovaj deterministički sistem, jednostavan na prvi pogled, mogao da ima izuzetno neobičnu dinamiku: za širok raspon vrednosti parametara

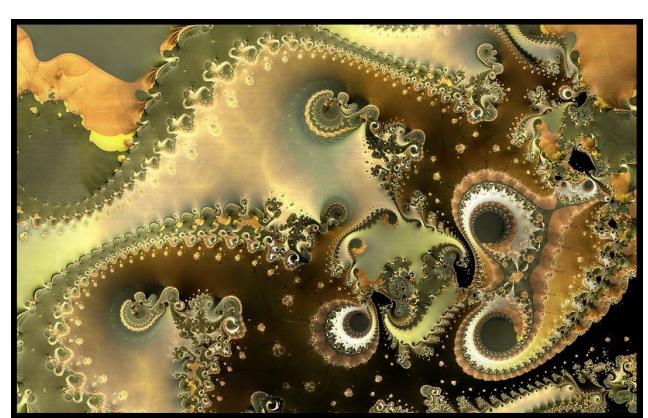
$\sigma, r, \beta$ , rešenja osciluju neregularno, nikad se ne ponavljaju, ali uvek ostaju u ograničenoj oblasti fazne ravni. Kada je predstavio trajektorije u tri dimenzije, Lorenc je otkrio da se približavaju komplikovanom skupu, koji se sada naziva *strani atraktor*. Za razliku od stabilnih fiksnih tačaka i graničnih cikla, strani atraktor nije ni tačka, ni kriva, čak ni površ - u pitanju je fraktal, sa fraktalnom dimenzijom između 2 i 3.

fazni portret Lorencovog sistema za  $\rho = 28$ ,  $\sigma = 10$  i  $\beta = 8/3$  - Lorencov atraktor

Kod više-dimenzionalnih DS bitan pojam je ATRAKTOR - podskup faznog prostora za koji postoji okolina sa osobinom da za svaku tačku  $x$  iz te okoline postoji  $T > 0$  tako da tok  $\Phi^t(x)$  ostaje u okolini atraktora za svako  $t \geq T$  - ondosno tačke koje se nađu dovoljno blizu atraktora ostaju blizu kada  $t \rightarrow \infty$ . Geometrijski, atraktor može da bude tačka, kriva, mnogostrukost, ili čak fraktal - poznat kao STRANI (NEOBIČNI) ATRAKTOR (Slika 31 - Slika 32.).



Slika 31: Fraktali



Slika 32: Fraktali

Fraktali su geometrijski objekti čija je fraktalna dimenzija strogog veća od topološke dimenzije. Fraktale je moguće uvećavati beskonačno mnogo, a da se

pri svakom novom povećanju vide neki detalji koji pre povećanja nisu bili vidljivi, i da količina novih detalja uvek bude otprilike jednaka. Fraktal se može podeliti na beskonačno mnogo delova koji su na različitim skalama veličine sami sebi jednaki. Oni su "približno" samoslični (sastoje se od umanjenih verzija samih sebe), ali isuviše nepravilni da bi se opisali jednostavnom geometrijom. Opisivanje atraktora haotičnih DS je jedan od osnovnih zadataka nelinearne dinamike i teorije haosa. [YOUTUBE VIDEO FAJL](#): Best fractals zoom ever

#### 4.4. Sistemi Lienarda

DJ drugog reda

$$(3) \quad x'' + f(x)x' + g(x) = 0$$

naziva se DJ LIENARDA i ekvivalentna je odgovarajućem DS

$$(4) \quad \frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -f(x)y - g(x)$$

Ova jednačina sadrži kao posebne slučajeve više diferencijalnih jednačina kojima se matematički modeliraju zakoni kretanja mehaničkih sistema. Poseban njen oblik je **JEDNAČINA VAN DER POLA** (Van der Pole),

$$(5) \quad x'' - \mu(1 - x^2)x' + x = 0, \quad \mu = \text{const} > 0,$$

kao matematički model kretanja nelinearnog oscilatora.

Sledeće tvrđenje, teorema Lienard daje dovoljne uslove jedinstvenog stabilnog graničnog cikla DS (4).

**Teorema 11 (Teorema Lienard)** *Neka su za DS (4) ispunjeni sledeći uslovi:*

- (i)  $g(x)$ ,  $f(x)$  su neprekidno-diferencijabilne za svako  $x$ ;
- (ii)  $g(x)$  je neparna funkcija i  $g(x) > 0$  za  $x > 0$ ;
- (iii)  $f(x)$  je parna funkcija;
- (iv) Funkcija  $F(x) = \int_0^x f(s) ds$  ima tačno jednu pozitivnu nulu  $x = a$ , pri čemu je

- $F(x) < 0$  za  $x \in (0, a)$ ,
- $F(x) > 0$  i  $F$  rastuća za  $x > a$ ,
- $F(x) \rightarrow \infty$ , kada  $x \rightarrow \infty$ .

Tada DS (4) ima jedinstven stabilan granični cikl oko koordinatnog početka kome se beskonačno približava svaka netrivijalna fazna trajektorija kad  $t \rightarrow \infty$ .

Teoremu su kasnije proširili Levinson i Smith.

**Teorema 12 (Teorema Levinson–Smita)** Neka su za DJ (3) ispunjeni sledeći uslovi:

- (i)  $f(x)$  je parna i neprekidna funkcija;
  - (ii)  $g(x)$  je neparna, neprekidna funkcija i  $g(x) > 0$  za  $x > 0$ ;
  - (iii)  $G(x) = \int_0^x g(s) ds$ ,  $G(x) \rightarrow \infty$ ,  $x \rightarrow \infty$ ;
  - (iv) Za neko  $a > 0$  za funkciju  $F(x) = \int_0^x f(s) ds$  je:
- $$\begin{cases} F(x) < 0, & \text{za } x \in (0, a) \\ F(x) > 0 \text{ i } F' >, & \text{za } x > a \\ F(x) \rightarrow \infty, & \text{kada } x \rightarrow \infty \end{cases}$$

Tada za DS (4) važi:

- (i) ima jedinstvenu tačku mirovanja  $(0, 0)$ ;
- (ii) ima jedinstven stabilan granični cikl  $C$  oko koordinatnog početka;
- (iii) sve trajektorije se spiralno približavaju graničnom ciklu  $C$ .

**Primer 4.15.** Pokazati da DJ Van der Pola (5) ima jedinstven stabilni granični cikl za  $\mu > 0$ .

REŠENJE. U DJ Van der Polu je funkcija  $g(x) = x$  neparna i pozitivna za  $x > 0$ , a funkcija  $f(x) = \mu(x^2 - 1)$  je parna. Kako je

$$F(x) = \mu \left( \frac{x^3}{3} - x \right) = \frac{\mu x}{3}(x^2 - 3)$$

imamo za  $\mu > 0$ :

- $F(x) = 0$  akko  $x = \pm\sqrt{3}$  ili  $x = 0$
- $F(x) < 0$  za  $x < \sqrt{3}$
- $F(x) > 0$  za  $x > \sqrt{3}$
- $F(x)$  je rastuća za  $x > \sqrt{3}$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = \infty$

Dakle, prema Teoremi 11 DJ (5) ima jedinstven stabilni granični cikl.  $\square$